Les algèbres de Petri commutatives

Eric Badouel* — Jules Chenou**

* Inria Rennes, Irisa
Campus Universitaire de Beaulieu
F35042 Rennes Cedex
ebadouel@irisa.fr
** Faculté des Sciences, Université de Douala
B.P. 24157 Douala, Cameroun
chenouj@yahoo.fr

RÉSUMÉ. Nous considérons des réseaux de Petri dans lesquels les relations de flots et les contenus des places prennent leurs valeurs dans un monoïde résidué. Les opérations de base de ces algèbres, le produit et le résidu, qui expriment respectivement dans ce contexte la production et la consommation de ressources, permettent d'énoncer la règle de franchissement des réseaux sous sa forme habituelle. Les réseaux de Petri usuels correspondent au monoïde des entiers naturels. Le cas où le produit est non commutatif, non considéré ici, permettrait de décrire des réseaux dont les places ont par exemple des structures de files . Une algèbre de Petri est un monoïde résidué pour lequel la règle de franchissement a les propriétés attendues: associativité, réversibilité, monotonie ... Nous montrons que la classe des algèbres de Petri commutatives coïncide avec la sous-variété des treillis résidués engendrée par le monoïde des entiers naturels. Nous exhibons une algèbre dans cette variété dont la classe associée de réseaux est néanmoins strictement plus expressive que celle des réseaux de Petri.

ABSTRACT. We try to identify a class of residuated monoids, called Petri algebras, for which one can mimic the token game of Petri nets in order to define the behaviour of these parametric Petri nets whose flow relations and place contents are valued in some fixed Petri algebra. Usual Petri nets are associated with the commutative monoid of natural numbers. Fifo or Lifo Petri nets can be modelled by considering some non commutative Petri algebras. We show that the class of commutative Petri algebras coincides with the subvariety of residuated lattices generated by the monoid of natural number. We exhibit, however, some commutative Petri algebra whose corresponding class of nets is strictly more expressive that the class of Petri nets.

MOTS-CLÉS : Réseaux de Petri, treillis résidués

KEYWORDS : Petri nets, residuated lattices

1. Introduction

Le modèle des réseaux de Petri a connu depuis son introduction au début des années soixante un essor considérable. Le succès de ce modèle vient du fait qu'il procure à la fois une méthode graphique de conception des systèmes informatiques, logiciels ou matériels, et un panel d'outils mathématiques pour l'analyse et la transformation des systèmes ainsi modélisés. A la base, un réseau contient deux types d'objets : des *transitions* T et des *places* P. Les états d'un système modélisé par un réseau de Petri sont par nature distribués : une configuration d'un réseau est une application, aussi appelée marquage, qui associe à chaque place la valeur locale de l'état en cette place. Un changement d'état du système est lié au franchissement d'une transition et celui-ci n'est conditionné par, et ne modifie que, le contenu des places dans son voisinage. Cette relation de voisinage est donnée sous la forme d'une relation (orientée) bipartie entre places et transitions $V \subseteq P \times T \cup T \times P$. On peut ainsi parler des places d'entrées ${}^\bullet t = \{p \in P \mid (p,t) \in V\}$ de la transition t, qui conditionnent le franchissement de la transition et sont généralement modifiées par celui-ci, et des places de sortie $t^\bullet = \{p \in \ \mid (t,p) \in V\}$ de t, qui bien qu'étant également affectées par le franchissement de la transition ne conditionnent pas celui-ci. [1] Le domaine des valeurs possibles des états locaux (les contenus des places) dépend évidemment de la classe de réseaux à laquelle on s'intéresse. Une telle valeur pourra être un entier indiquant le nombre de ressources contenues dans la place, un nombre réel positif lorsque ces ressources sont de nature continue [5, 6]... Lorsqu'une place figure une propriété du système, la vérité de cette propriété dans une configuration donnée est mesurée par le contenu de la place correspondante ; cette mesure (booléenne, probabiliste, possibiliste, floue ...) est élément d'une algèbre logique. On suppose donc qu'à chaque place $p \in P$ d'un réseau est associée une algèbre $A_p$et une configuration du réseau, appelé *marquage*, est donnée par une application $M: \ P \to \bigsqcup_{p \in P} A_p$ associant une valeur $M(p) \in A_p$ à chacune des places du réseau. La relation de voisinage est munie d'une valuation $\lambda : V \to \bigsqcup_{p \in P} A_p$telle que $\lambda(p,t) \in A_p$pour tout $p \in {}^\bullet t$ et $\lambda(t,p) \in A_p$ pour tout $p \in t^\bullet$. Le franchissement d'une transition t se décompose en deux étapes : une « consommation » de ressources $\lambda(p,t)$ dans les places d'entrée $p \in {}^\bullet t$ lorsque ces ressources y sont effectivement disponibles, c'est à dire si $M(p) \sqsupseteq \lambda(p,t)$ pour tout $p \in {}^\bullet t$; puis une « production » de ressources $\lambda(t,p)$ dans les places de sortie $p \in t^\bullet$. Nous supposons par conséquent que les algèbres A_p sont des monoïdes commutatifs $A_p = (A_p, \oplus, 0)$ de divisibilité c'est à dire tels que

$$\text{la relation} \quad a \sqsupseteq b \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \cdot a = b \oplus c \quad \text{est un ordre} \tag{1}$$

1. Dans certains cas tels les réseaux de Petri bornés et les réseaux élémentaires le franchissement est également conditionné par les places de sortie mais on peut se ramener au cas précédent en ajoutant des places « complémentaires » et en modifiant en conséquence la relation de franchissement.

L'interprétation est que la constante 0 figure l'absence de ressource et l'opération binaire $\oplus$ l'accumulation de ressources. La condition (1) a pour conséquences immédiates :

$$\begin{array}{l} a \oplus b \sqsupseteq a, b \\ 0 \sqsubseteq a \\ a \oplus b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b = 0 \end{array}$$

Par ailleurs nous devons disposer d'une opération de résiduation $\ominus$ telle que $a \ominus b$ représente la ressource résiduelle obtenue en retirant b à a lorsque $b \sqsubseteq a$. On doit par conséquent avoir

$$b \sqsubseteq a \;\Rightarrow\; a = (a \ominus b) \oplus b \tag{2}$$

Nous appelerons pré-structure de Petri commutative la donnée $(M, \oplus, 0, \ominus)$ d'un monoïde commutatif et d'une opération de résiduation vérifiant les conditions (1) et (2) précédentes. On pose $Pre(p,t) = \lambda(p,t)$ si $p \in {}^\bullet t$ et $Pre(p,t) = 0$ sinon et de façon symétrique $Post(p,t) = \lambda(t,p)$ si $p \in t^\bullet$ et $Post(p,t) = 0$ sinon, de sorte que la relation de transition $M[t > M'$ exprimant le fait que la transition t est franchissable au marquage M et conduit alors au nouveau marquage M' est donnée par :

$$M[t > M' \;\Leftrightarrow\; \forall p \in P \;\; M(p) \sqsupseteq Pre(p,t) \wedge M'(p) = (M(p) \ominus Pre(p,t)) \oplus Post(p,t)$$

Un réseau est homogène si toutes les algèbres A_p sont identiques, hypothèse que nous ferons par la suite sachant que le cas « multi-sortes » se traiterait de la même manière. De même nous nous limitons ici au cas commutatif. Avec des monoïdes non commutatifs (voir [2]) il serait possible de modéliser des réseaux à files [10] par exemple.

2. Les réseaux de Petri

Les réseaux de Petri usuels correspondent au monoïde $(\mathbb{N}, +, 0)$ des entiers naturels. Rappelons qu'un réseau de Petri est une structure $(P, T, Pre, Post)$ dans laquelle P est un ensemble fini de *places*, T est un ensemble fini de *transitions* (disjoint de P) et Pre, $Post : T \to \mathbb{N}^P$ sont des applications appelées *relations de flots*. La relation de transition $M[t > M'$ est donnée par :

$$M[t > M' \;\Leftrightarrow\; M \sqsupseteq Pre(t) \text{ et } M' = (M - Pre(t)) + Post(t)$$

dans laquelle la relation d'ordre et les opérations sont définies « point à point ». Le système de transitions ainsi obtenu est déterministe et co-déterministe ce qui signifie que lorsque $M[t > M'$ la donnée de M et de t détermine M' et, inversement, la donnée de M' et de t détermine M. Nous qualifierons de réversible un système de transitions déterministe et co-déterministe. Si $u = a_0 \ldots a_{n-1} \in T^+$ est une suite non vide de transitions notons $M[u > M'$ lorsqu'il existe une suite de marquages $M = M_0, M_1, \ldots, M_n = M'$ tels que $M_i[a_i > M_{i+1}$ pour tout $0 \leq i < n$. On pose par ailleurs $M[\varepsilon > M$ où $\varepsilon \in T^*$ est le mot vide et M un marquage quelconque, et on note $M[u >$ (respectivement $[u > M'$) la proposition $\exists M' \cdot M[u > M'$ (resp. $\exists M \cdot M[u > M'$). Si $a, b \in T$ sont deux transitions, on a

$$\begin{array}{lll} M[ab> & \Leftrightarrow & M \sqsupseteq Pre(a) \text{ et } (M - Pre(a)) + Post(a) \sqsupseteq Pre(b) \\ & \Leftrightarrow & M \sqsupseteq \max(Pre(a); Pre(a) + (Pre(b) - Post(a))) \\ & \Leftrightarrow & M \sqsupseteq Pre(a) + \max(0; Pre(b) - Post(a)) \\ & \Leftrightarrow & M \sqsupseteq Pre(a) + (Pre(b) \ominus Post(a)) \end{array}$$

où $\ominus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la différence tronquée donnée par $n \ominus m = \max(0; n - m)$; cette opération est caractérisée par la propriété universelle suivante : pour tous entiers naturels n, m et p

$$n + m \sqsupseteq p \quad \Leftrightarrow \quad n \sqsupseteq p \ominus m$$

On étend inductivement les relations de flots au monoïde libre $Pre, Post : T^* \to \mathbb{N}^P$ en posant $Pre(\varepsilon)(p) = Post(\varepsilon)(p) = 0$ et pour tout $u \in T^*$et $a \in T$

$$\begin{array}{lll} Pre(ua) & = & Pre(u) + (Pre(a) \ominus Post(u)) \\ Post(ua) & = & Post(a) + (Post(u) \ominus Pre(a)) \end{array}$$

Il est alors facile de vérifier que pour tout $u \in T^*$et tous marquages M et M'

$$M[u > M' \quad \Leftrightarrow \quad M \sqsupseteq Pre(u) \text{ et } M' = (M \ominus Pre(u)) + Post(u)$$

en particulier $Pre(u)$ mesure la quantité de ressources nécessaire au franchissement de $u \in T^*$: $M[u > \quad \Leftrightarrow \quad M \sqsupseteq Pre(u)$. De plus la réversibilité du graphe de marquage s'exprime par

$$M[u > M' \quad \Leftrightarrow \quad M' \sqsupseteq Post(u) \text{ et } M = (M' \ominus Post(u)) + Pre(u)$$

et en particulier $[u > M' \quad \Leftrightarrow \quad M' \sqsupseteq Post(u)$. Enfin les deux caractérisations précédentes de la relation de transition étendue $M[u > M'$ peuvent être combinées sous la forme suivante

$$M[u > M' \quad \Leftrightarrow \quad M \sqsupseteq Pre(u) \text{ et } M' \sqsupseteq Post(u) \;\wedge\; M \ominus Pre(u) = M' \ominus Post(u))$$

3. Les algèbres de Petri commutatives

Nous voyons que tous les calculs précédents reposent sur la structure particulière du monoïde $(\mathbb{N}, +, 0)$ des entiers naturels. Celui-ci est canoniquement ordonné par $n \sqsupseteq m \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \cdot n = m + k$ et il est résidué, c'est à dire que l'addition possède un pseudo-inverse $\ominus$ caractérisé par la propriété universelle $n + m \sqsupseteq p \quad \Leftrightarrow \quad n \sqsupseteq p \ominus m$. Si $(G, +, 0)$ est un groupe commutatif muni d'une relation d'ordre compatible avec son addition (i.e. cette dernière est croissante en chacun de ses arguments) alors son cône positif $P = \{x \in G \mid x \geq 0\}$ est un sous-monoïde de G dont le neutre est non décomposable ($x + y = 0 \ \Rightarrow \ x = y = 0$) ; inversement tout sous-monoïde P de G vérifiant cette propriété induit un ordre compatible sur G dont P est le cône positif correspondant : $x \sqsubseteq y \ \Leftrightarrow \ \exists z \in P \cdot y = x + z$. Bien sûr un sous-monoïde d'un groupe est automatiquement simplifiable. Si le groupe est de plus ordonné en treillis, c'est à dire que toute paire d'éléments $\{a; b\}$ possède une borne supérieure $a \sqcup b$ et une borne inférieure $a \sqcap b$, alors le cône positif est résidué avec $a \ominus b = (a - b) \sqcup 0$ (où $a - b = a + (-b)$) et est lui-même ordonné en treillis. Evidemment $(\mathbb{N}, +, 0)$ est le cône positif du groupe $(\mathbb{Z}, +, 0)$ des entiers relatifs avec son ordre usuel ; ce dernier est un ordre total et donc en particulier un treillis et les considérations précédentes s'appliquent. Nous savons par ailleurs combien ce groupe des entiers relatifs joue un rôle central dans l'étude structurelle des réseaux de Petri (équation fondamentale, invariants, siphons, trappes ...) ainsi que pour la mise en oeuvre algorithmique de la synthèse de réseaux de Petri (théorie des régions [1]).

Proposition 1. *Si $(A, \oplus, 0, \sqsubseteq)$ est un monoïde de divisibilité (condition 1) avec une opération de résidu $\ominus$ adjointe à l'addition, en ce sens que*

$$a \oplus b \sqsupseteq c \quad \Leftrightarrow \quad a \sqsupseteq c \ominus b \tag{3}$$

alors la condition (2) équivaut à l'identité : $a \sqcup b = b \oplus (a \ominus b)$ ou encore à l'identité $a \sqcap b = a \ominus (a \ominus b)$. Une pré-structure de Petri vérifiant la condition (3) est donc ordonnée en treillis.

Avec l'ordre inverse $\leq = \sqsupseteq$ une telle structure est un monoïde commutatif résidué ordonné en treillis aussi appelé treillis commutatif résidué, on sait que de telles structures forment une variété équationnelle [4, 9]. Les groupes commutatifs ordonnés en treillis avec $a \ominus b = a + (-b)$ pour résidus en constituent la sous-variété caractérisée par l'identité $x \oplus (0 \ominus x) = 0$ d'où il s'ensuit que le cône positif d'un groupe commutatif ordonné en treillis est une pré-structure de Petri ordonnée en treillis. Si $(A, \oplus, 0, \sqsubseteq, \ominus)$ est une pré-structure de Petri commutative, on définit une relation binaire $\otimes$ sur le produit $A \times A$ de la manière suivante. On note Pre et $Post$ les deux projections canoniques de $A \times A$ vers A de sorte qu'un élément $\alpha \in A \times A$ s'écrive $\alpha = (Pre(\alpha), Post(\alpha))$, on définit alors la relation binaire $\otimes$ sur $A \times A$ à l'aide des identités suivantes :

$$\begin{aligned} Pre(\alpha \otimes \beta) &= Pre(\alpha) \oplus (Pre(\beta) \ominus Post(\alpha)) \\ Post(\alpha \otimes \beta) &= (Post(\alpha) \ominus Pre(\beta)) \oplus Post(\beta) \end{aligned}$$

Proposition 2. *Pour les pré-structures de Petri commutatives vérifiant la condition (3), les conditions suivantes sont équivalentes*

1) *L'opération $\otimes$ est associative*

2) *L'identité suivante est satisfaite*

$$(b \oplus c) \ominus a = (b \ominus (a \ominus c)) \oplus (c \ominus a) \tag{4}$$

3) *Le monoïde est simplifiable :* $a \oplus b = a \oplus c \;\Rightarrow\; b = c$

4) *L'identité suivante est satisfaite :*

$$(a \oplus b) \ominus b = a \tag{5}$$

Définition 3. *Une algèbre de Petri commutative* $(A, \oplus, 0, \sqsubseteq, \ominus)$ *est un monoïde commutatif de divisibilité (condition 1), simplifiable (condition 5) ayant un résidu adjoint à l'addition (condition 3) vérifiant la condition (2).*

On définit inductivement les applications $Pre, Post : P \times T^* \to A$ en posant que $\varphi(p,u) = (Pre(p,u), Post(p,u))$ où $\varphi(p,-) : T^* \to A \times A$ est l'unique morphisme de monoïdes tel que les images $\varphi(p,t) = (Pre(p,t), Post(p,t))$ des générateurs $t \in T$ sont données par les relations de flot du réseau. On a alors :

$$\begin{array}{l} Pre(p,\varepsilon) = Post(p,\varepsilon) = 0 \\ Pre(p,uv) = Pre(p,u) \oplus (Pre(p,v) \ominus Post(u,p)) \\ Post(p,uv) = (Post(p,u) \ominus Pre(p,v)) \oplus Post(p,v) \end{array}$$

Proposition 4. *La relation de transition généralisée* $M[u > M'$ *stipulant l'existence d'une suite de transitions étiquetée* u *allant de* M *à* M' *est donnée par une quelconque des trois conditions équivalentes suivantes*

1) $\forall p \in P \;\; M(p) \sqsupseteq Pre(p,u)$ et $M'(p) = (M(p) \ominus Pre(p,u)) \oplus Post(p,u)$

2) $\forall p \in P \;\; M'(p) \sqsupseteq Post(p,u)$ et $M(p) = (M'(p) \ominus Post(p,u)) \oplus Pre(p,u)$

3) $\forall p \in P \;\; M(p) \sqsupseteq Pre(p,u)$; $M'(p) \sqsupseteq Post(p,u)$ et $M(p) \ominus Pre(p,u) = M'(p) \ominus Post(p,u)$

En utilisant des résultats récents sur les GMV-algèbres ([3, 7]) et en observant que les algèbres de Petri commutatives est une variété isomorphe à une sous-variété de GMV-algèbres bien identifiée, on déduit que :

Proposition 5. *Les algèbres de Petri commutatives coïncident avec les cônes positifs des groupes commutatifs ordonnés en treillis. Par ailleurs ces derniers constituent la sous-variété des groupes ordonnés en treillis engendrée par* $\mathbb{Z}$*, et leurs cônes positifs (i.e. les algèbres de Petri commutatives) est la sous-variété des treillis résidués engendrée par* $\mathbb{N}$*.*

4. Les réseaux lexicographiques

Une place p dont le type A_p est une sous-algèbre d'un produit d'algèbres de Petri commutatives ($A_p \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$) peut être remplacée par n places $p_1, \ldots, p_n$ de types respectifs $A_1, \ldots, A_n$. Un résultat classique d'algèbre universelle dit que toute algèbre est un produit sous-direct d'algèbres irréductibles

Proposition 6. *Une algèbre de Petri commutative est sous-directement irréductible si, et seulement si, elle est totalement ordonnée et l'ordre* $y \ll x \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{N} \quad k \cdot y \sqsubset x$ *est une relation bien fondée.*

Nous pouvons par ailleurs exhiber une algèbre de Petri commutative dont la classe associée de réseaux est strictement plus expressive que les réseaux de Petri. Il s'agit du cône positive du produit lexicographique de $\mathbb{Z}$ avec lui même : $L_2 = (\mathbb{Z} \circ \mathbb{Z})^+$. Le produit lexicographique de deux groupes ordonnés G et H est le groupe produit $G \times H$ muni de l'ordre lexicographique :

$$(x, y) \leq_{G \circ H} (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x <_G x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq_H y')$$

Si G et H sont des groupes commutatifs totalement ordonnés, il en est de même de leur produit lexicographique. Par ailleurs ce produit est associatif et on peut définir inductivement $L_\alpha = (\mathbb{Z}^\alpha)^+$pour tout ordinal α en posant $\mathbb{Z}^{\alpha+1} = \mathbb{Z}^\alpha \circ \mathbb{Z}$ et en munissant le groupe des suites d'entiers $\mathbb{Z}^\alpha$ lorsque α un ordinal limite de l'ordre lexicographique défini comme suit : $u \leq_{lex} v \;\Leftrightarrow\; u <_{lex} v$ ou $u = v$ où

$$u <_{lex} v \quad \Leftrightarrow \quad \exists \beta < \alpha \, \forall \gamma \leq \beta \;\; u_\gamma = v_\gamma \text{ et } u_\beta < v_\beta$$

Notons $n \cdot \omega + m$ l'élément $(n, m) \in \mathbb{Z} \circ \mathbb{Z}$ et considérons le réseau sur L_2 ayant une seule place $P = \{p\}$ et deux transitions $T = \{a; b\}$ avec les relations de flots $Pre(p, a) = \omega$, $Pre(p, b) = 1$ et $Post(p, a) = Post(p, b) = 0$. A partir du marquage initial ω nous avons d'une part la transition $\omega[a> 0$ et d'autre part la suite infinie de transitions

$$\omega[b> \omega - 1[b> \omega - 2 \ldots [b> \omega - n \ldots$$

Il n'est pas possible de trouver un réseau de Petri ayant le même graphe de marquage ou le même langage. En effet du conflit entre les transitions a et b au marquage initial, nous déduirions sinon l'existence d'une place p telle que $Pre(p, a) + Pre(p, b) > M_0(p) \geq Pre(p, a), Pre(p, b)$ (en particulier $Pre(p, a), Pre(p, b) > 0$) et $Pre(p, b) - Post(p, b) > M_0(p) - Pre(p, a)$ (a n'est plus franchissable après b), et donc $Pre(p, b) - Post(p, b) > 0$ ce qui contredit le fait que b soit infiniment franchissable puisque

$$M_0[b^n > M_n \quad \Rightarrow \quad M_n(p) = M_0(p) - n \times (Pre(p, b) - Post(p, b))$$

5. Travaux futurs

Nous avons défini dans cet article ce que sont les algèbres de Petri « commutatives » sans préciser ce que nous entendons par algèbre de Petri de façon générale ; si tant est que cette notion soit définie, c'est à dire que l'ensemble des structures en question forment une variété équationnelle. Des propositions préliminaires ont été faites dans [2] où deux règles de franchissement ont été considérées conduisant à distinguer des réseaux « à files » et des réseaux « à piles ». Cette étude sera reprise, critiquée et étendue sur la base des présents résultats. Par ailleurs les réseaux lexicographiques sont une extension stricte des réseaux de Petri mais les deux ont beaucoup en commun (en particulier la même théorie (in)équationnelle). Cette classe de réseaux semblait par conséquent une bonne candidate pour être une extension non triviale des réseaux de Petri pour laquelle les principaux résultats/techniques des réseaux de Petri seraient encore applicables. Des études ont été menées dans ce sens [8] montrant au contraire que la plupart des propriétés de base de ces réseaux sont indécidables.

6. Bibliographie

[1] E. Badouel, Ph. Darondeau. Theory of Regions. In third *Advance Course on Petri Nets*, Dagstuhl Castle, W. Reisig and G. Rozenberg, editors. *Lectures on Petri Nets I : Basic Models*, Lecture Notes in Computer Science vol 1491 (1995), 529-586.

[2] E. Badouel, J. Chenou. Nets Enriched over Closed Monoidal Structures. In Proc. ICATPN'03, Eindhoven, Lecture Notes in Computer Science vol. 2679 (2003), 64-81.

[3] P. Bahls, J. Cole, N. Galatos, P. Jipsen, C. Tsinakis. Cancellative residuated lattices. *Algebra Universalis* 12 :42 (2003), 1-24.

[4] G. Birkhoff. *Lattice Theory*. Third edition, AMS Colloquium Publications, vol. XXV (American Mathematical Society, Providence, 1967)

[5] R. David, H. Alla. Petri nets for modeling of dynamic systems - a survey. *Automatica*, 30 (1994), 175-202.

[6] M. Droste, R.M. Shortt. Continuous Petri nets and transition systems. In H. Ehrig, J. Padberg, and G. Rozenberg, editors, *Uniform approaches to Petri nets*, Advances in Petri nets, Lecture Notes in Computer Science vol. 2128 (2001), 457-484.

[7] N. Galatos. *Varieties of Residuated Lattices*. Ph. D. Thesis, Dept. of Mathematics, (Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, 2003).

[8] G. Guillou. Les réseaux lexicographiques. Rapport de Recherche GUILLOU-04-2004, Université de Brest, avril 2004.

[9] P. Jipsen, C. Tsinakis. A survey of Residuated Lattices. In *Ordered Algebraic Structures*, J. Martinez, editor (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002), 19-56.

[10] G. Memmi, A. Finkel. An introduction to fifo nets - monogeneous nets : a subclass of fifo nets. *Theoretical Computer Science* 35 (1985), 191-214.