Combinatoire autour des mots sturmiens

Idrissa KABORÉ   Théodore TAPSOBA

RÉSUMÉ:

Nous établissons quelques propriétés des mots sturmiens et classifions, ensuite, les mots infinis qui possèdent, pour tout entier non nul n, exactement $n+2$ facteurs de longueur n. Nous introduisons également la notion d'insertion k à k sur les mots infinis puis nous calculons la complexité des mots obtenus en appliquant l'insertion aux mots sturmiens.

ABSTRACT

We state some new properties on sturmian words and classify words which have, for any non-zero integer n, exactly $n+2$ subwords of length n. We also introduce notion of insertion k by k on infinite words and we give the complexity function's formula of words got by applying the insertion on sturmian words.

1 Introduction

La fonction de complexité p, qui calcule le nombre de facteurs de longueur donnée dans un mot, est souvent utilisée pour caractériser certaines familles de mots ([2]). Ainsi on sait, depuis les résultats précurseurs de Morse et Hedlund ([8], [9]), qu'un mot dont la fonction de complexité vérifie $p(n) \leq n$ pour un certain entier n, est ultimement périodique et que les mots sturmiens sont les mots de complexité minimale parmi les mots infinis non ultimement périodiques. Depuis ces travaux, de nombreuses études ([3], [4], [5], [6], [10], [11]) ont été menées sur les mots sturmiens et ont conduit à de nombreuses généralisations.

Dans ce travail, après avoir donné quelques notations et définitions utiles nous établissons des propriétés combinatoires des mots sturmiens puis nous classifions tous les mots quasi-sturmiens de complexité $n+2$. Ensuite nous introduisons la notion "d'insertion k à k" sur les mots infinis puis nous calculons la complexité des mots obtenus en appliquant l'insertion k à k aux mots sturmiens.

2 Préliminaires

La plupart des notations ici peuvent être retrouvées dans le livre de M. Lothaire [7].
Soit $A = \{a, b, c\}$ un alphabet fixé. A^*, l'ensemble des mots finis sur A, est le monoïde libre engendré par A; ε le mot vide étant l'élément neutre. A^+ est l'ensemble des mots finis non vides. Pour tout $u \in A^*$, $|u|$ désigne le nombre de lettres du mot u ($|\varepsilon| = 0$) et pour toute lettre x de A, $|u|_x$ est le nombre d'occurrence de x dans u. Un mot u de longueur n formé d'une seule lettre x est simplement noté $u = x^n$; par extension $x^0 = \varepsilon$. Soit $u = u_1u_2 \cdots u_n$ un mot tel que $u_i \in A$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Un mot infini est une suite de lettres de A indexée par $\mathbb{N}$. On désigne par A^ω l'ensemble des mots infinis sur A et on pose $A^\infty = A^* \cup A^\omega$. Un mot infini u est ultimement périodique s'il existe deux mots $v \in A^*$ et $w \in A^+$ tels que $u = vw^\omega$ où $w^\omega = www \cdots$ est une concaténation infinie de w.
Soit $u \in A^\infty$ et $v \in A^*$. v est un facteur de u s'il existe $u_1 \in A^*$ et $u_2 \in A^\infty$ tels que $u = u_1vu_2$; on dit aussi que u contient v. Le facteur v est dit préfixe (resp. suffixe) si u_1 (resp. u_2) est le mot vide.
Soient $u \in A^\omega$, w un facteur de u et x une lettre de A. Le langage des facteurs de longueur n de u est noté $L_n(u)$ et l'ensemble de tous les facteurs de u est noté $L(u)$. La lettre x est un prolongement à gauche (resp. à droite) de w si xw (resp. wx) appartient à $L(u)$. On note ∂^-w (resp. ∂^+w) le nombre de prolongements à gauche (resp. à droite) de w. On dira qu'un facteur w est biprolongeable (resp. triprolongeable) à droite si $\partial^+w = 2$ (resp. $\partial^+w = 3$). De la même manière on définit la notion de facteur biprolongeable ou triprolongeable à gauche. Un facteur est dit spécial à gauche (resp. à droite) s'il admet plusieurs prolongements à gauche (resp. à droite). Un facteur à la fois spécial à gauche et à droite est dit bispécial.
Un mot u est dit récurrent si tout facteur de u apparaît une infinité de fois dans u. Un mot est dit uniformément récurrent ou minimal si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe N tel que tout facteur de longueur N contient tous les facteurs de longueur n.
La fonction de complexité de u est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par $p_u(n) = \#L_n(u)$, où $\#L_n(u)$ désigne le cardinal de $L_n(u)$.

3 Mots sturmiens

Définition 3.1 *Un mot infini u sur $A = \{a,b\}$ est un mot sturmien si pour tout entier n, $p(n) = n + 1$.*

Exemple: Le mot sturmien le plus connu est le célèbre mot de Fibonacci obtenu par itération successive du morphisme Φ défini par $\Phi(a) = ab$ et $\Phi(b) = a$:

$$Fib = \lim_{n\to\infty} \Phi^n(a) = abaababaabaababaababaabaababaaba \cdots .$$

Définition 3.2 *Soit u un mot sturmien. On dit que u est a-sturmien (resp. b-sturmien) lorsqu'il contient a^2 (resp. b^2).*

Définition 3.3 *Soit u un mot infini sur A. On dit que u est équilibré si pour tout entier n et tous $v,w \in L_n(u)$; $\Big| |v|_x - |w|_x \Big| \leq 1$ pour tout $x \in A$.*

Théorème 3.1 [5] *Un mot infini u est non équilibré si et seulement si il existe un unique mot t de longueur minimale tel que u contienne ata et btb.*

Théorème 3.2 [7] *Un mot infini u est sturmien si et seulement si il est non ultimement périodique et équilibré.*

Théorème 3.3 *Soit u un mot a-sturmien. Alors il existe un entier naturel non nul n tel que u s'écrive*

$$u = a^{n_0} b a^{n+\epsilon_1} b a^{n+\epsilon_2} b a^{n+\epsilon_3} b \cdots \qquad (\clubsuit)$$

avec $n_0 \leq n+1$ et $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ une suite sturmienne sur l'alphabet $\{0,1\}$.

Remarque 3.1 *Morse et Hedlund ont montré dans [9] que tout mot a-sturmien u prenait la forme ($\clubsuit$) avec $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ une suite sur l'alphabet $\{0,1\}$. Nous établissons ici que la suite $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ est toujours sturmienne.*

Preuve: Soit u un mot a-sturmien. Il existe un entier non nul n tel que u est de la forme

$$u = a^{n_0} b a^{n+\epsilon_1} b a^{n+\epsilon_2} b a^{n+\epsilon_3} b \cdots$$

où $n_0 \leq n+1$ et $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ une suite sur l'alphabet $\{0,1\}$ ([9]).
Supposons $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ non sturmienne. Alors $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ est ultimement périodique ou non équilibré.
Si $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ était ultimement périodique alors u le serait aussi, ce qui est impossible car u est sturmien. Par suite, $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ est non équilibrée, et possède, d'après le théorème 3.1, deux facteurs de la forme $0t0$ et $1t1$. Considérons les facteurs de $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$; en les écrivant de telle sorte que chaque lettre précède et succède un b puis en remplaçant 0 par a^n et 1 par a^{n+1} on retrouve certains facteurs de u. Ainsi u admet deux facteurs de la forme ba^nTa^nb et $ba^{n+1}Ta^{n+1}b$. En posant $w = a^nTa^n$ on remarque que les mots awa et bwb sont dans u. Donc u est non équilibré. Absurde, car u est un mot sturmien. Par conséquent $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ est une suite sturmienne. $\square$

Soit $\alpha \in]0,1[$ et R une rotation d'angle α sur $[0,1[$ ou sur $]0,1]$. On a $R(\rho) = \rho + \alpha \bmod 1 = \{\rho + \alpha\}$, partie fractionnaire de $\rho + \alpha$. L'orbite d'un point ρ du cercle unité par la rotation d'angle α est l'ensemble des points $\{\{\rho + n\alpha\}, n \geq 0\}$. Le codage de l'orbite de ρ sous la rotation R d'angle α sur le cercle unité partitionné en deux intervalles complémentaires $I_0 = [0, 1-\alpha[$ et $I_1 = [1-\alpha, 1[$ ou $I_0 =]0, 1-\alpha]$ et $I_1 =]1-\alpha, 1]$ est le mot

$u_0u_1\cdots u_n\cdots$ défini sur l'alphabet $\{0,1\}$ par: $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\rho+n\alpha\} \in I_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

L'orbite d'un point ρ du cercle unité par une rotation d'angle irrationnel est dense sur le cercle unité.Pour plus de détails sur les codages de rotations voir par exemple [1, 3, 11] et [7, chap. 6 sect. 6.1.2]. La caractérisation suivante, due à Morse et Hedlund ([8], [9]), est fondamentale.

Théorème 3.4 *Un mot u est sturmien si et seulement si il existe un nombre irrationnel α et un nombre réel ρ tels que u est le codage de l'orbite de ρ sous la rotation R d'angle α.*

Soit u le mot codant l'orbite d'un point ρ sous la rotation d'angle irrationnel α. Un mot fini $w = w_1w_2\cdots w_n$ sur l'alphabet $\{0,\,1\}$ est un facteur de u si et seulement si il existe un entier naturel k tel que: $R^k(\rho) \in I_w = \bigcap_{j=0}^{n-1} R^{-j}\left(I_{w_{j+1}}\right)$ où $I_{w_{j+1}} = \begin{cases} I_0 & \text{si } w_{j+1}=0 \\ I_1 & \text{sinon} \end{cases}$ ([2], [13, chap. 2 sect. 2.1]). Nous pouvons établir notre résultat.

Théorème 3.5 *Soit $u = u_0u_1u_2\cdots$ un mot sturmien et $k \geq 1$ un entier. Tout facteur w de u, de longueur n quelconque, apparaît dans u à toutes les positions modulo k, i.e*

$$\forall i \in \{0,\,\cdots,k-1\}\ \ \exists l_i \in \mathbb{N} : w = u_{kl_i+i}u_{kl_i+i+1}\cdots u_{kl_i+i+n-1}.$$

Preuve: Soit u un mot sturmien et $k \geq 1$ un entier. D'après le théorème 3.5, il existe $\rho \in [0{,}1\,[$ et un nombre irrationnel $\alpha \in [0,1\,[$ tel que u soit le codage de l'orbite de ρ par la rotation d'angle α sur le cercle unité munie de la partition $P = ([0{,}1-\alpha\,[,\,[1-\alpha{,}1\,[)$. Considérons w un facteur de u de longueur n non nulle. Alors I_w est un intervalle de longueur non nulle. Pour tout $i \in \{0,\,\cdots,\,k-1\}$ posons $\rho' = \rho + i\alpha$ et $\alpha' = k\alpha$. Il vient que α' est irrationnel comme α. Par suite ρ' est d'orbite dense dans $[0{,}1\,[$ par la rotation d'angle irrationnel α'. Par conséquent, il existe $l_i \geq 0$ tel que $\rho' + l_i\alpha' \mod 1 \in I_w$. Autrement dit, il existe $l_i \geq 0$ tel que $\rho + (kl_i+i)\,\alpha \mod 1 \in I_w$ et donc w apparaît dans u à la position kl_i+i dans u. □

Remarque 3.2 *Il est connu que dans un mot sturmien tout facteur apparaît une infinité de fois. Notre résultat précise les positions d'apparition de tout facteur dans un mot sturmien.*

4 Classification des mots de complexité $n+2$

Définition 4.1 *Un mot infini est dit quasi-sturmien s'il existe des entiers n_0 et k tels que $p(n) = n+k$ pour tout $n \geq n_0$.*

Les mots quasi-sturmiens ont une combinatoire assez proche des mots sturmiens. Nous nous intéressons ici aux mots quasi-sturmiens de complexité $n+2$.

P. Alessandri, dans un rapport de recherche ([1]), a établie une classification des mots de complexité $n+2$. Nous en donnons une formulation légèrement différente qui permet de construire de façon explicite tous les mots de complexité $n+2$ en nous appuyant essentiellement sur la forme des mots sturmiens décrite dans le théorème 3.3.

Lemme 4.1 *Soit u un mot de l'une des formes suivantes, à une permutation de lettres près:*

(1) cv *avec* v *sturmien sur* $\{a,b\}$.

(2) $T^{k_0}\left(a^{k+\epsilon_1}bca^{k+\epsilon_2}bca^{k+\epsilon_3}bc\cdots\right)$

(3) $T^{k_0}\left(\,(ab)^{k+\epsilon_1}\,ac\,(ab)^{k+\epsilon_2}\,ac\,(ab)^{k+\epsilon_3}\,ac\cdots\right)$

(4) $T^{k_0}\left(\,(ab)^{k+\epsilon_1}\,c\,(ab)^{k+\epsilon_2}\,c\,(ab)^{k+\epsilon_3}\,c\cdots\right)$

où T *est le décalage,* $k_0\geq 0$, $k>0$ *et* $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$, *une suite sturmienne sur* $\{0,1\}$. *Alors,* u *est de complexité* $n+2$.

Preuve: (1) Pour tout $n\geq 1$, tout préfixe de longueur n n'apparaît qu'une seule fois dans u. Donc $p_u(n)=1+p_v(n)=1+(n+1)$ puisque v est sturmien. D'où $p_u(u)=n+2$.

(2) u n'est pas ultimement périodique car il est image du mot sturmien

$$v=T^{k_0}\left(a^{k+\epsilon_1}ba^{k+\epsilon_2}ba^{k+\epsilon_3}b\cdots\right)$$

par le morphisme non périodique: ($a\longmapsto a$, $b\longmapsto bc$). Donc u possède au moins un facteur spécial pour toute longueur donnée n . Nous observons que a est la seule lettre spéciale dans u:la lettre a se prolonge par a et c à gauche et par a et b à droite. Donc tout facteur spécial de u est biprolongeable. Supposons que u possède deux facteurs T_1 et T_2 spéciaux à droite pour une certaine longueur n. On peut prendre n minimal et nous aurons ($T_1=aT$ et $T_2=bT$) ou ($T_1=bT$ et $T_2=cT$) ou ($T_1=aT$ et $T_2=cT$) avec $T\in A^+$. Si bT est dans u alors T commence nécessairement par c puisque b ne précède que c dans u. Par suite, comme a ne précède pas c dans u, le premier cas ne peut se produire. Il en est de même pour le second cas puisque cc n'est pas dans u. Ainsi, le seul cas possible est $T_1=aT$ et $T_2=cT$. Il en résulte que $aTa, cTb\in L(u)$ et donc $aTa, bcTb\in L(u)$. En effaçant c dans aTa et $bcTb$ On retrouve deux facteurs ata et btb du mot v. Donc v n'est pas équilibré. Absurde, car v est sturmien. Donc $p_u(n+1)-p_u(n)=1$, pour tout $n\geq 1$ et comme $p_u(1)=3$ on déduit que $p_u(n)=n+2$.

Les formes (3) et (4) se démontrent de la même manière qu'en (2). □

Théorème 4.1 *Soit u un mot infini sur l'alphabet* $\{a,b,c\}$. *Le mot* u *est de complexité* $n+2$ *si et seulement si il a l'une des formes suivantes à une permutation de lettres près:*

(1) cv *avec* v *sturmien sur* $\{a,b\}$.

(2) $T^{k_0}\left(a^{k+\epsilon_1}bca^{k+\epsilon_2}bca^{k+\epsilon_3}bc\cdots\right)$

(3) $T^{k_0}\left(\,(ab)^{k+\epsilon_1}\,ac\,(ab)^{k+\epsilon_2}\,ac\,(ab)^{k+\epsilon_3}\,ac\cdots\right)$

(4) $T^{k_0}\left((ab)^{k+\epsilon_1} c\,(ab)^{k+\epsilon_2} c\,(ab)^{k+\epsilon_3} c\cdots\right)$
où T est le décalage, $k_0 \geq 0$, $k > 0$ et $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$, une suite sturmienne sur $\{0,1\}$.

Preuve:*Nécessité:* Soit u un mot de complexité $n+2$ sur $\{a,b,c\}$. Alors, u est soit récurrent, soit non récurrent.

– Supposons u non récurrent. Il existe n_0 non nul tel que le préfixe de longueur n_0 n'apparaisse qu'une seule fois dans u. En prenant $v = T(u)$, nous avons $p_v(n) = p_u(n) - 1 = n+1$ pour tout $n \geq n_0$. S'il existe un entier non nul m tel que $p_v(m) \geq m+2$ alors pour tout n, $p_v(n+m) \geq n+m+2$ puisque la fonction de complexité est strictement croissante, contradiction. Donc, $p_v(n) = n+1$ pour tout n et v est sturmien. Ainsi, v est binaire et s'écrit par exemple avec a et b. Par suite, $u = cv$ puisque u est ternaire.

– Supposons u récurrent. Alors pour tout n, le mot u possède un unique facteur spécial de longueur n. Par suite, u possède soit une lettre bispéciale dont son carré, soit une lettre bispéciale sans son carré, soit enfin une lettre spéciale à gauche et une autre lettre spéciale à droite:

Cas 1: Prenons a la lettre bispéciale avec aa dans u. Par suite, comme u est récurrent nous: $L_2(u) = \{aa, ab, ca, bc\}$ ou $L_2(u) = \{aa, ac, ba, cb\}$.
On peut supposer pour continuer que $L_2(u) = \{aa, ab, ca, bc\}$. Définissons les morphismes suivants:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \{a,b\} & \longrightarrow & \{a,b,c\} \\ & a & \longmapsto & a \\ & b & \longmapsto & bc \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rrcl} g: & \{a,b,c\} & \longrightarrow & \{a,b\} \\ & a & \longmapsto & a \\ & b & \longmapsto & b \\ & c & \longmapsto & \varepsilon \end{array}$$

Remarquons que $g \circ f = Id_{\{a,b\}}$. Posons $v = g(u)$. Nous avons $u = f(u)$. Montrons que u est un mot a-sturmien. bb n'est pas dans v puisque bcb n'est pas dans u. Le mot v est non ultimement périodique puisque $f(v)$ est non ultimement périodique. Donc v possède au moins un facteur spécial pour toute longueur donnée. Considérons w un facteur spécial à droite de v. Nous avons $wa, wb \in L(v)$. Donc $f(wa), f(wb) \in L(u)$ i.e $f(w)a, f(w)bc \in L(u)$. Ainsi $f(w)$ est spécial à droite dans u.
Soit w et w' deux facteurs spéciaux à droite de même longueur dans v. Alors $f(w)$ et $f(w')$ sont spéciaux à droite dans u. Soit N un entier tel que $N \geq \max(|f(w)|, |f(w')|)$. u possède un unique facteur spécial z de longueur N. Le suffixe de longueur $|f(w)|$ (resp. $|f(w')|$) de z est spécial à droite donc égal à $f(w)$. De même le suffixe de longueur $|f(w')|$ de z est égal $f(w')$. Par suite $f(w)$ et $f(w')$ sont suffixes de z. Donc les mots $g\circ f(w) = w$ et $g \circ f(w') = w'$ sont suffixes de $g(z)$. Par conséquent $w = w'$ puisqu'ils sont de même longueur. Finalement v possède un et un seul facteur spécial pour toute longueur donnée. Ainsi, v est sturmien. Comme bb n'est pas dans v alors v est a-sturmien. Donc, il existe un entier naturel non nul k tel que u s'écrit $v = a^{k_0}ba^{k+\epsilon_1}ba^{k+\epsilon_2}ba^{k+\epsilon_3}b\cdots$ avec $k_0 \leq k+1$ et $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ une suite sturmienne sur l'alphabet $\{0,1\}$. En définitive u vérifie (2).

En suivant une démarche analogue au *cas 1* on démontre que u vérifie les formes (3) et (4) en traitant respectivement les deux autres cas. $\square$

5 Complexité des mots par insertion k à k des mots sturmiens

Considérons u un mot infini sur un alphabet fini A. Ecrivons u à l'aide d'une factorisation par des mots de longueur constante k non nulle. On a:

$$u = m_0 m_1 m_2 \cdots m_i \cdots$$

avec $m_i \in L_k(u)$, $i \in \mathbb{N}$. Maintenant, insérons entre deux facteurs consécutifs m_i et m_{i+1} de u une lettre c étrangère à l'alphabet de u ($c \notin A$). On obtient le mot $v = m_0 c m_1 c m_2 c \cdots c m_i c \cdots$. Nous appelons v le mot par insertion k à k de u.

Proposition 5.1 *Soit u un mot infini et $k \geq 1$ un entier. Si P_u et P_v désignent respectivement les fonctions de complexité de u et de v (le mot par insertion k à k de u), et $n \geq 0$, $0 \leq r \leq k$ des entiers nous avons l'inégalité:*

$$P_v(kn + n + 1 + r) \leq (r + 1)\, P_u\,(kn + r) + (k - r) P_u\,(kn + r + 1)\,.$$

Preuve: Remarquons que les facteurs de longueur $(k+1)\,n + 1 + r$ de v proviennent de certains facteurs de u de longueur $kn + r$ et $kn + r + 1$. De plus, tout facteur de u de longueur $kn + r$ (resp. $kn + r + 1$) produit (par le biais de l'insertion) au plus $r + 1$ (resp. $k - r$) facteurs de longueur $(k+1)\,n + 1 + r$ de v. D'où l'inégalité:

$$P_v(kn + n + 1 + r) \leq (r + 1)\, P_u\,(kn + r) + (k - r) P_u\,(kn + r + 1)\,. \ \square$$

Nous allons montrer que l'inégalité ci-dessus devient une égalité lorsque u est un mot sturmien.

Théorème 5.2 *Soit u un mot sturmien et $k \geq 1$ un entier. La fonction de complexité P_v du mot v obtenu par insertion k à k de u est donnée par:*

$$\forall n \geq 1,\ P_v\,(n) = kn + k + 1.$$

Preuve: Soit $n \geq 0$ et $0 \leq r \leq k$ deux entiers. En conséquence du théorème 3.5, on obtient, par insertion de tout facteur de u de longueur $kn + r$ (resp. $kn + r + 1$), $r + 1$ (resp. $k - r$) facteurs de v de longueur $(k+1)n + 1 + r$. Les facteurs de v de longueur $(k+1)n+1+r$ contiennent n ou $n+1$ occurrences de la lettre étrangère c à u. D'où les égalités:

$$\begin{aligned} P_v((k+1)n + 1 + r) &= (r + 1)\, P_u\,(kn + r) + (k - r) P_u\,(kn + r + 1) \\ &= (r + 1)\,(kn + r + 1) + (k - r)\,(kn + r + 1 + 1) \\ &= k\,((k + 1)\,n + r + 1) + k + 1 \end{aligned}$$

Donc: $\forall n \geq 1, P_v(n) = kn + k + 1$. $\square$

Remarque 5.1 *Pour qu'un mot quasi-sturmien v soit obtenu par insertion k à k il faut et il suffit que $k = 1$. Les mots quasi-sturmiens par insertion sont alors de complexité $n + 2$.*

Références

[1] P. ALESSANDRI, *Classification et représentation des mots de complexité $n + 2$*, Université Aix-Marseille II, 1995.

[2] J.-P. ALLOUCHE, *Sur la complexité des suites infinies*, Bull. Belg. Math. Soc. (1) (1994) 133-143.

[3] P. ARNOUX et G. RAUZY, *Représentation géométrique de suites de complexité $2n + 1$*, Bull. Soc. Math. de France 119 (1991), 199-215.

[4] E. M. COVEN, *Sequences with minimal block growth, II*, Math. Systems Theory 8 (1975), 376-382.

[5] E. COVEN, G. A. HEDLUND, *Sequences with minimal block growth*, Math. Systems Theory 7 (1973), 138-153.

[6] G. DIDIER, *Caractérisation des N-écritures et application à l'étude des suites de complexité ultimement $n + C^{\mathrm{ste}}$*, Theoret. Comput. Sci. 215 (1999), 31-49.

[7] M. LOTHAIRE, *Algebraic combinatorics on words*, Cambridge University Press, 18 April 2002.

[8] M. MORSE et G. A. HEDLUND, *Symbolic dynamics*, Amer. J. Math. 60 (1938), 815-866.

[9] M. MORSE et G. A. HEDLUND, *Symbolic dynamics II: Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. 62 (1940), 1-42.

[10] M. E. Paul, *Minimal symbolic flows having minimal block growth*, Math. Systems Theory 8 (1975), 309-315.

[11] G. RAUZY, *Suites à termes dans un alphabet fini.* Sémin. Théorie des nombres (1982-1983) 25-01. 25-16. Bordeaux.

Idrissa KABORÉ
Institut des Sciences Exactes et Appliquées
Université polytech. de Bobo-Dioulasso
01 BP 1091 Bobo-Dioulasso
Burkina Faso
ikaborei@yahoo.fr

Théodore TAPSOBA
Ecole Supérieure d'Informatique
Université polytech. de Bobo-Dioulasso
01 BP 1091 Bobo-Dioulasso
Burkina Faso
theo_tapsoba@univ-ouaga.bf