

## Contrôle de l'erreur d'approximation via l'estimateur hiérarchique et le gradient topologique

A. Alla\* — M. Masmoudi\*\* — Z. Mghazli\*

\* LIRNE, Equipe d'Ingénierie MATHématique (E.I.MA.).

Département de Mathématiques et d'Informatique. Faculté des sciences, Université Ibn Tofail. B.P: 133, Kénitra Maroc.

\*\* Laboratoire Mathématique pour l'Industrie et la Physique (M.I.P).  
Université Paul Sabatier, Toulouse France.

**RÉSUMÉ.** Le but de ce travail est d'utiliser l'estimation *a posteriori* hiérarchique pour procéder à une adaptation de maillage. Comme l'estimateur hiérarchique est un estimateur global, nous développons une technique permettant une analyse locale de l'erreur, basée sur un développement asymptotique topologique. Nous définissons un *gradient topologique* associé à chaque arête du maillage, et utilisons ce gradient comme critère dans une stratégie d'adaptation. Le problème modèle considéré est le problème de Dirichlet pour l'opérateur de Laplace approché par une méthode d'éléments finis de degré 1.

**ABSTRACT.** Our goal is to use the hierarchical *a posteriori* estimation for a mesh adaptation strategy. Since the hierarchical estimator is a global result, we develop a technique allowing a local analysis of error via the topological asymptotic development. We define a *topological gradient* associated to each edge and we use it as a criterion in adaptation strategy. We consider the Dirichlet problem for the Laplace operator approximated by a finite element method of degree 1.

**MOTS-CLÉS :** Éléments finis, estimateur d'erreur hiérarchique, gradient topologique.

**KEYWORDS :** Finite element, hierarchical error estimator, topological gradient.

## 1. Introduction et position du problème

Les estimations *a posteriori* et les procédures d'adaptation de maillage sont devenues ces dernières décennies, l'un des principaux axes de développement dans le domaine de l'analyse numérique et un outil indispensable dans la discrétisation des équations aux dérivées partielles. Elles ont pour but de permettre d'améliorer la qualité de la solution calculée et d'assurer, que la précision obtenue après adaptation est équidistribuée.

Les estimations *a posteriori* d'erreur sont données en termes d'indicateurs d'erreur qui peuvent être locaux et qui ne tiennent compte que de la solution approchée  $u_h$  effectivement calculée et des données du problème. Elles permettent d'identifier les régions du domaine source d'erreurs grossières. Plusieurs types d'estimations *a posteriori* ont été développés depuis les travaux pionniers de Babushka et Rheinboldt [1]. On en distingue les estimations par résidus, les estimations par interpolation, les estimations par résolution de problèmes locaux, les estimations par dualité, les estimations hiérarchiques [2], ... Une description générale de ces estimations pour les problèmes elliptiques se trouve dans [4].

Dans ce travail, nous donnons une estimation de l'erreur d'approximation en utilisant l'indicateur d'erreur hiérarchique et le gradient topologique de la fonctionnelle erreur, via un développement asymptotique topologique [3]. Ce dernier peut être utilisé comme critère d'adaptation de maillage.

Etant donné un ouvert polygonal  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ , considérons le problème modèle : Trouver  $u \in \mathcal{V}$ , tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (1)$$

où

$$V := H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \text{et} \quad L(v) := \int_{\Omega} f v dx.$$

L'espace de Hilbert  $\mathcal{V}$  est muni de la norme énergie  $\|v\|^2 = a(v, v)$ . Nous approchons le problème (1) par une méthode d'éléments finis. Si  $\mathcal{T}_h$  est une triangulation régulière de  $\Omega$ , on considère l'espace éléments finis de degrés  $k$ , défini par

$$\mathcal{V}_h^{(k)} = \{v_h \in \mathcal{V}; v_h|_K \in P_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

où  $P_k(K)$  est l'espace des polynômes de degré  $\leq k$  dans  $K$ . Le problème approché est : Trouver  $u_h \in \mathcal{V}_h^{(k)}$ , tel que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h^{(k)}. \quad (2)$$

La méthode hiérarchique est basée sur une idée simple : étant donné une approximation par éléments finis d'ordre  $k$ , une meilleure approximation, d'ordre  $k+1$ , peut être utilisée pour estimer la précision de la solution calculée. Pour éviter de procéder à des résolutions coûteuses, on utilise une base hiérarchique de l'espace d'approximation éléments finis ([2]).

## 2. Estimateur d'erreur hiérarchique

L'erreur  $e = u - u_h$ , commise en approchant (1) par (2) est solution du problème

$$a(e, v) = R^{u_h}(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (3)$$

où  $R^{u_h}(v) := L(v) - a(u_h, v)$ . Si on note par  $\mathcal{E}_h$  l'ensemble des arêtes intérieures du maillage  $\mathcal{T}_h$  alors pour  $k = 1$  et en utilisant une intégration par parties, nous avons

$$R^{u_h}(v) = \int_{\Omega} f v dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n} v ds = \int_{\Omega} f v dx - \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right]_E v ds.$$

Une approximation de l'erreur  $e$  peut être obtenue en résolvant le problème dans  $\mathcal{V}_h^{(k+1)}$ , ce qui peut être très coûteux. L'idée ici (cf. [2]) est d'utiliser une base hiérarchique de l'espace d'approximation  $\mathcal{V}_h^{(k+1)}$  de manière à ce que ce dernier soit la somme directe de  $\mathcal{V}_h^{(k)}$  (polynôme de degré  $k$ ) et d'un espace de correction  $E_h$  de polynômes de degré  $k+1$  :

$$\mathcal{V}_h^{(k+1)} = \mathcal{V}_h^{(k)} \oplus E_h.$$

Pour le cas  $k = 1$  qui nous intéresse ici, nous notons  $E_h^{(2)}$  par  $E_h$ ,  $\mathcal{V}_h^{(2)}$  par  $\bar{\mathcal{V}}_h$  et  $\mathcal{V}_h^{(1)}$  par  $\mathcal{V}_h$ ,  $\bar{u}_h$  est l'approchée dans  $\mathcal{V}_h^{(2)}$  de la solution du problème (1). L'approximation linéaire par morceaux est alors corrigée par une approximation quadratique par morceaux où seulement les valeurs aux nœuds des milieux des côtés sont calculées, les valeurs des sommets restant inchangées. Cette erreur peut donc être approchée par la solution du problème

$$\begin{cases} \text{trouver } e_h \in E_h, \text{ tel que :} \\ a(e_h, \hat{w}_h) = R^{u_h}(\hat{w}_h) \quad \forall \hat{w}_h \in E_h. \end{cases} \quad (4)$$

La méthode hiérarchique a été analysée pour une large classe de problèmes aux limites et le résultat principal est global.

**Théorème 1** (voir [2]) *Sous les hypothèses*

1) *Hypothèses de saturation*

$$(HS) \quad \exists \beta, \quad 0 < \beta < 1 \quad \text{tel que} \quad \|u - \bar{u}_h\| \leq \beta \|u - u_h\|$$

2) *Inégalité de Cauchy-Binyakowski-Schwarz*

$$(CBS) \quad \begin{cases} \exists \gamma < 1 \quad \text{indépendant de } h, \text{ tel que} \\ \forall v \in \mathcal{V}_h \quad \forall w \in E_h \quad |a(v, w)| < \gamma \|v\| \|w\|, \end{cases}$$

nous avons

$$(1 - \beta^2)(1 - \gamma^2) \|u - u_h\|^2 \leq \|e_h\|^2 \leq \|u - u_h\|^2. \quad (5)$$

Une stratégie d'adaptation de maillage peut être considérée en minimisant la fonctionnelle

$$m(e_h) = \frac{1}{2} \|e_h\|^2. \quad (6)$$

L'estimateur d'erreur hiérarchique  $e_h$  est une quantité calculable, équivalente à l'erreur  $e = u - u_h$  dans le sens de (5). Il peut donc être utilisé comme critère dans une stratégie d'adaptation de maillage pour évaluer la précision de  $u_h$ . Mais cette quantité est globale et n'indique pas directement les endroits d'erreur grossière.

Nous remarquons que le second membre de (3) s'exprime en fonction des sauts de la dérivée normale de la solution  $u_h$  sur les arêtes du maillage. Nous allons utiliser un développement asymptotique topologique de  $m(e_h)$ , en introduisant des perturbations aux voisinage des arêtes.

### 3. Développement asymptotique topologique

Soit  $c \in \prod_{E \in \mathcal{E}_h} L^p(E)$  où  $1 < p < 2$ . On note par  $c_E := c|_E$  la composante de  $c$  relative à l'arête  $E$ . On associe à chaque  $c$  la forme linéaire dans  $E_h$  notée  $R_c^{u_h} \in \mathcal{L}(E_h)$  et définie par

$$R_c^{u_h}(w_h) = L(w_h) - \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \left( \left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] + c_E \right) w_h \, ds.$$

Soit  $e_h^c$  dans  $E_h$  la solution du problème

$$a(e_h^c, w_h) = R_c^{u_h}(w_h) \quad \forall w_h \in E_h. \quad (7)$$

**Lemme 1** Soit  $1 < p < 2$  et  $m(\cdot)$  la fonctionnelle définie par (6). Considérons la fonctionnelle coût  $\mathcal{M} : \prod_{E \in \mathcal{E}_h} L^p(E) \rightarrow \mathbf{R} : c \mapsto \mathcal{M}(c) = m(e_h^c)$ , où  $e_h^c$  est la solution du problème (7). Soit  $q_h^c$  la solution du problème adjoint :

$$a(\psi_h, q_h^c) = -Dm(e_h^c) \cdot \psi_h \quad \forall \psi_h \in E_h.$$

Alors la fonctionnelle  $\mathcal{M}$  est différentiable et pour tout  $\delta c \in \prod_{E \in \mathcal{E}_h} L^p(E)$  nous avons :

$$\mathcal{M}'(c) \cdot \delta c = \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \delta c \cdot q_h^c \, ds$$

**Preuve :** Pour la preuve de ce lemme, nous avons utilisé la technique du lagrangien (cf. [3]).

Soit  $\bar{E} \in \mathcal{E}_h$  un élément quelconque. Supposons que  $|\bar{E}| = 2\rho$  et  $x_0$  le milieu de  $\bar{E}$ . Si on choisit, dans le dernier lemme,  $c = 0$  et

$$\delta c_\rho = \delta c_{\bar{E}} = \begin{cases} \left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \text{ sur } \bar{E} \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \quad (8)$$

alors nous avons

$$\mathcal{M}'(0) \cdot \delta c_{\bar{E}} = \frac{1}{2} \int_{\bar{E}} \left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] (s) \cdot q_h^0(s) \, ds.$$

Considérons  $e_h^{\delta c_\rho} \in E_h$  la solution du problème

$$a(e_h^{\delta c_\rho}, w_h) = R_{\delta c_\rho}^{u_h}(w_h) \quad \forall w_h \in E_h,$$

et notons  $m(\rho) = m(e_h^{\delta c_\rho})$ , nous avons

$$m(\rho) - m(0) = \frac{1}{2} \int_E \left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] (s) q_h^0(s) ds + o(\rho).$$

Sachant que  $\left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right]$  est constant sur  $E$ , et en posant

$$\bar{q}_h^0(x_0) := \frac{1}{|E|} \int_E q_h^0(s) ds$$

nous obtenons que

$$m(\rho) = m(0) + \rho g(x_0) + o(\rho).$$

La quantité  $g$ , appelée *gradient topologique*, est définie par

$$g(x_0) = \left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] (x_0) \bar{q}_h^0(x_0).$$

Ceci signifie que l'étude asymptotique de la fonctionnelle  $m$ , prend en compte le saut  $\left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right]$  et l'état adjoint  $q_h^0$ .

#### 4. Test numérique

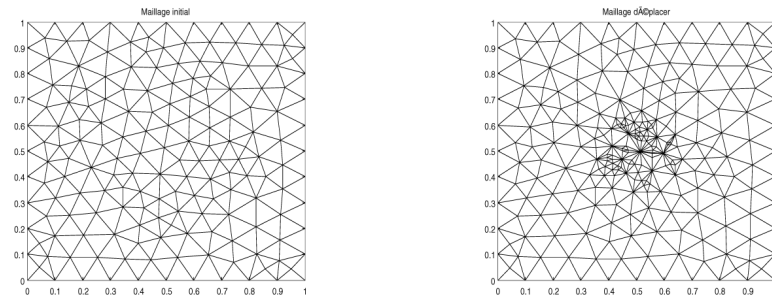
Les résultats numériques sont effectués à l'aide de Matlab, pour  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , le pas de maillage initial égale à  $h = 0.1$  et la solution exacte est donnée par

$$u(x, y) = xy(x-1)(y-1) \exp(-50((x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2)).$$

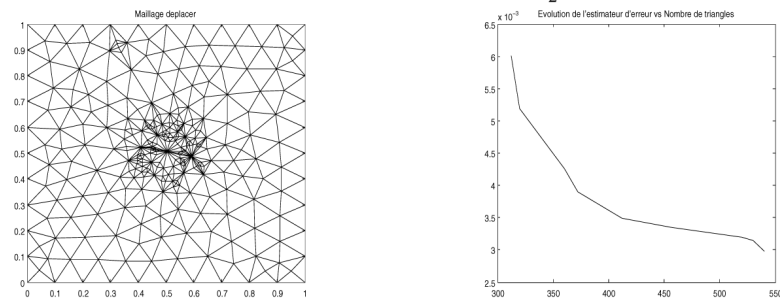
Comme on a vu, le *gradient topologique* est calculé sur chaque arête du maillage, on note  $\alpha$  le nombre le plus négatif parmi ces valeurs. Dans le premier test, on repère toutes les valeurs du *gradient topologique* qui se trouvent dans l'intervalle  $[\alpha, \frac{\alpha}{2}]$ , on coupe l'arête en deux et on raffine le maillage au voisinage de cette arête. Comme on pouvait le prévoir, vu la nature de la fonction  $u$ , le maillage est raffiné autour du point  $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  (voir figure 2-gauche) et l'erreur hiérarchique diminue avec le raffinement (voir figure 2-droite). Dans le deuxième test, on considère un intervalle plus grand à savoir  $[\alpha, \frac{\alpha}{4}]$ , et comme on pouvait s'y attendre, il y a plus d'éléments raffinés (voir figure 4).

#### 5. Conclusion

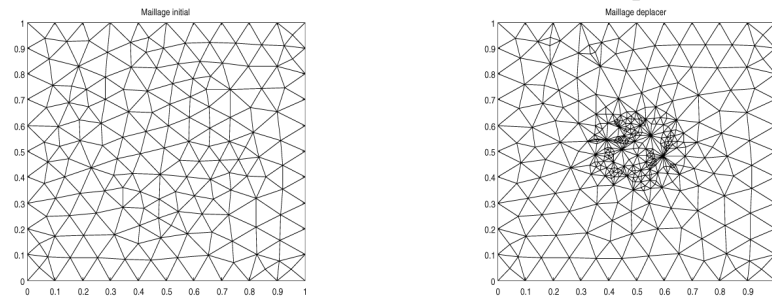
L'erreur hiérarchique est une erreur globale comme le montre le Théorème 1, en la combinant avec cette méthode du *gradient topologique* nous avons pu détecter les endroits d'erreur grossière.



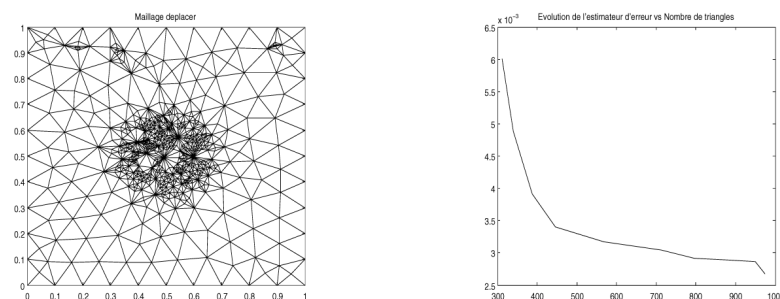
**Figure 1.** Maillage initial et maillage à l'itération 5, cas  $[\alpha, \frac{\alpha}{2}]$



**Figure 2.** Maillage à l'itération 10 et l'évolution de l'erreur, cas  $[\alpha, \frac{\alpha}{2}]$



**Figure 3.** Maillage initial et maillage à l'itération 5, cas  $[\alpha, \frac{\alpha}{4}]$



**Figure 4.** Maillage à l'itération 10 et l'évolution de l'erreur, cas  $[\alpha, \frac{\alpha}{4}]$

**Remerciements :** travail réalisé avec le soutien du projet Maroco-Allemand *Volkswagen* et de *SARIMA*.

---

## 6. Bibliographie

- [1] BABUSKA I., RHEINOLDT W.C. : "Error estimates for adaptive finite element computation", SIAM Numer. Anal., 1978, 15, p.736-754.
- [2] BANK R. E., SMITH R. K. : "A posteriori error estimates based on hierarchical bases", SIAM J. Numer. Anal., Vol 30, N°4, pp.921-935, August 1993.
- [3] FEHRENBACH J., MASMOUDI M. : "An introduction to the topological asymptotic expansion with example". ARIMA, volume 5- Novembre 2006, pp. 230-255.
- [4] VERFURTH R. : "A review of a posteriori error estimation and adaptive Mesh-Refinement Techniques", Wiley and Tubner, 1996.