

## Estimation d'erreur *a posteriori* pour un modèle d'écoulement diphasique de type convection-diffusion

S. El Hassouni<sup>(1,3)</sup>, J. Jaffré<sup>(2)</sup>, Z. Mghazli<sup>(1)</sup>.

(1) LIRNE, E.I.M.A.

Université Ibn Tofail,

Faculté des Sciences

B.P. 133

Kénitra, Maroc.

(2) INRIA-Rocquencourt,

B.P. 105, 78153,

Le Chesnay, Cedex, France.

(3) UFR: Analyse Numérique et Optimisation,

Université Mohammed V,

Faculté des Sciences-Agdal,

Rabat, Maroc.

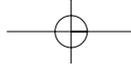
.....  
**RÉSUMÉ.** Le but de ce travail est de développer des indicateurs d'erreur *a posteriori* pour un problème d'écoulement diphasique dans un milieu poreux. Nous allons utiliser la méthode des éléments finis mixtes pour résoudre l'équation de pression et le terme de diffusion de l'équation de saturation. L'adaptation de maillage basée sur ces indicateurs s'avère un outil efficace pour la réalisation des tests numériques.

**ABSTRACT.** The aim of this work is to develop *a posteriori* error indicators for a flow in porous media. We use a mixed finite element method to resolve the pressure equation and to calculate the diffusion term in the saturation equation.

The mesh adaptivity via this family of indicators is an efficient tool for the numerical tests

**MOTS-CLÉS :** Méthode des éléments finis mixtes, adaptation de maillage, estimation *a posteriori*, milieu poreux.

**KEYWORDS :** Mixed finite element method, mesh adaptation, *a posteriori* analysis, porous media.



## 1. Introduction

Nous présentons dans ce travail une analyse *a posteriori* d'un modèle d'écoulement diphasique incompressible immiscible dans un milieu poreux, approché par un schéma de volumes finis, dans le cadre de la récupération secondaire du pétrole.

Les techniques d'auto adaptation de maillage basées sur les estimations *a posteriori* ont connu un grand essor ces derniers décennies. Elles sont devenues un outil indispensable pour le calcul scientifique des équations aux dérivées partielles approchées principalement par la méthode des éléments finis[1][2][8].

Le problème d'écoulement diphasique peut être modélisé par un système d'équations elliptique en  $p$  et une autre de type convection-diffusion en  $s$ . L'analyse *a posteriori* de l'équation elliptique a fait l'objet d'une communication à la conférence internationale MAMERN07 à Grenade (voir [5]), cette équation est approchée par une méthode d'éléments finis mixtes où la vitesse totale de Darcy et la pression seront approchées respectivement dans l'espace des fonctions constantes par morceaux et l'élément de Crouzeix-Raviart[4].

Maintenant nous allons approcher le terme de diffusion  $r$  par une méthode des éléments finis mixte de Raviart-Thomas de bas degré  $RT^0$ , tandis que le terme de convection sera approché par un schéma explicite décentré amont de type Godunov.

Dans le prochain paragraphe, nous allons présenter le problème modèle qui sera constitué de deux équations. Dans le troisième paragraphe nous rappellerons l'étude de la première équation : nous allons définir les espaces fonctionnelles utilisés, ensuite nous décrirons la discrétisation du problème envisagée par un schéma de volumes finis et nous démontrons une borne supérieure. Cette borne est fournie par des indicateurs d'erreurs locaux. L'étude de l'équation de saturation se fera dans le quatrième paragraphe. Nous terminons par des tests numériques réalisés par le logiciel FreeFem++[6].

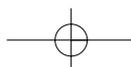
## 2. Position du problème

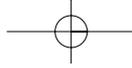
Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière lipschitzienne  $\partial\Omega$  qu'on suppose décomposée en trois parties disjointes de mesures strictement positives  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ . Pour simplifier nous allons négliger les effets des forces de gravité (i.e. nous supposons que  $\Omega$  est horizontal).

Le système d'équations que nous allons étudier est obtenu à partir des lois de conservation de la masse des deux fluides (l'eau et l'huile) et de la loi de Darcy. (L'eau sera indexée par la lettre  $w$  et l'huile par la lettre  $o$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\phi s_i) + \operatorname{div} u_i = F_i, & \text{in } \Omega \times [0, T] & i = w, o \\ u_i = -K \lambda_i \nabla p_i & \text{in } \Omega \times [0, T] & i = w, o \\ s_w + s_o = 1, & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ p_c(s_w) = p_w - p_o, & \text{in } \Omega \times [0, T] \end{cases}$$

Où  $s_i, p_i$  et  $u_i$  sont respectivement la saturation, la pression et la vitesse de filtration du fluide  $i$  ;  $\lambda_i$  sa mobilité relative. Nous allons supposer que les  $F_i$  sont nuls, que le tenseur de perméabilité absolue  $K$  est diagonal et que la porosité du milieu  $\phi$  est constante.  $p_c$  est la pression capillaire[7]. Nous choisissons comme inconnues la saturation de l'eau et la





pression globale, de plus nous introduisons la vitesse de filtration totale :  $u = u_o + u_w$ .  
L'équation de la saturation s'écrit :

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} u_w = 0 \quad (1)$$

où la vitesse de Darcy de la phase eau est donnée par

$$\begin{cases} u_w = r + f \\ r = -K\alpha(s), \quad f = Kf_w(s)u, \end{cases} \quad (2)$$

avec

$$f_w(s) = \frac{\lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w}, \quad a(s) = f_w \lambda_o \frac{dp_c}{ds} \quad \text{et} \quad \alpha(s) = \int_0^s a(\tau) d\tau.$$

L'équation de l'écoulement s'écrit

$$\begin{cases} u = -K\lambda(s)\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (3)$$

où la pression globale  $p$  [3] et  $\lambda$  sont données par

$$p = \frac{1}{2}(p_o + p_w) + \int_0^s (f_w - \frac{1}{2}) \frac{dp_c}{dt} \quad \text{et} \quad \lambda = \lambda_w + \lambda_o.$$

Les conditions initiales et aux limites sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} s &= s_{w,M}, \quad u.n = -u_d \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ u.n &= 0, \quad r.n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \\ p &= p_d, \quad s = s_{w,m} \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ s_w(x, 0) &= s_d(x) \quad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

Ce problème d'écoulement diphasique est ainsi modélisé par un système non linéaire, couplé formé d'une équation parabolique de type convection-diffusion en  $s$  et d'une autre elliptique en  $p$ .

### 3. Etude de l'équation elliptique

Nous allons nous intéresser à l'équation de l'écoulement (3) avec une condition de Dirichlet non homogène, dont l'inconnue principale est  $p$  et l'inconnue secondaire est  $u$ . Nous allons donner une formulation mixte de ce problème qui sera approchée par une méthode d'éléments finis mixtes basée sur l'élément de Crouzeix-Raviart. Supposons que  $p_o$  appartient à  $H^{1/2}(\Gamma_2)$ , nous allons nous ramener à une condition de dirichlet homogène  $\bar{p}$  grâce au théorème de trace. Le système (3) devient

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ et } \bar{p} \text{ solution de} \\ \mathbf{A}^{-1}u + \nabla \bar{p} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{sur } \Omega, \\ u.n = -u_d \quad \text{on } \Gamma_1, \quad u.n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad \bar{p} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (4)$$





où  $\mathbf{A} = K\lambda(s)$  est une matrice diagonale définie positive de coefficients  $a_1(s)$  et  $a_2(s)$ .  
Soit

$$X = (L^2(\Omega))^d, Y^0 = \{q \in H^1(\Omega) \text{ tel que } q = 0 \text{ sur } \Gamma_2\} \text{ et } W^o = \{q|_{\Gamma_1}, q \in Y^0\}$$

une formulation variationnelle de (4) est

$$\begin{cases} \text{chercher } u \in X, \bar{p} \in Y^0 \text{ tel que} \\ a(u, v) + b(v, \bar{p}) = 0 \quad \forall v \in X \\ b(u, q) = - \int_{\Gamma_1} u_d q \quad \forall q \in Y^0 \end{cases} \quad (5)$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mathbf{A}^{-1} u v, \quad b(v, q) = \int_{\Omega} \nabla q \cdot v, \quad \text{et } u_o \in (W^o)'$$

On introduit les normes suivantes sur  $X$  et  $Y^o$  respectivement :

$$\|v\|_{\mathbf{A}} = \|\mathbf{A}^{-1/2} v\|_{L^2(\Omega)^2} \text{ et } \|q\|_{\mathbf{A}^*} = \int_{\Omega} (\mathbf{A} \nabla q \cdot \nabla q)^{1/2} \quad (6)$$

#### • Un schéma de volumes finis

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation admissible de  $\Omega$  formée de triangles,

$$\mathcal{T}_h = \{T_i, i \in I\} : \Omega = \bigcup_{T_i \in \mathcal{T}_h} \bar{T}_i.$$

On note  $\mathcal{E}_h$  l'ensemble des arêtes des éléments de  $\mathcal{T}_h$ . Pour tout  $e \in \mathcal{E}_h$ ,  $m_e$  désigne le milieu de  $e$  et  $h_e$  sa longueur. Si  $e \in \partial T_i$  alors  $n_{i,e}$  représente le vecteur normal unitaire extérieur à  $e$ .

Soit  $X_h \subset X$  une approximation de  $X$  définie par

$$X_h = \{v_h \in L^2(\Omega)^2; \forall T_i \in \mathcal{T}_h : v_h|_{T_i} \in \mathcal{P}_0(T_i)^2\}$$

et  $Y_h^0 \not\subset Y^0$  une approximation non conforme de  $Y^0$  définie par l'approximation de Crouzeix-Raviart [4]

$$Y_h^0 = \{q_h \in L^2(\Omega); \forall T_i \in \mathcal{T}_h : q_h|_{T_i} \in \mathcal{P}_1(T_i) \\ \text{et } q_h \text{ continue en } m_e, e \in \mathcal{E}_h \text{ et } q_h(m_e) = 0, \text{ si } e \subset \Gamma_2\}.$$

Une approximation de (5) est donc donnée par

$$(P_h) \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in X_h, \bar{p}_h \in Y_h^0 \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) + b_h(v_h, \bar{p}_h) = 0 \quad \forall v_h \in X_h \\ b_h(u_h, q_h) = \int_{\Gamma_1} (-u_{oh}) q_h \quad \forall q_h \in Y_h^0 \end{cases} \quad (7)$$

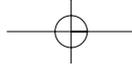
où  $b_h(\cdot, \cdot)$  est défini par  $b_h(u_h, q_h) = \sum_{T_i \in \mathcal{T}_h} \int_{T_i} u_h \cdot \nabla q_h$

et  $u_{dh}$  et  $p_{dh}$  sont respectivement des approximations de  $u_d$  et  $p_d$  qu'on précisera par la suite.

Introduisons le saut de  $u_h$ , à travers  $e$ , défini par

$$[u_h \cdot n]_e = \begin{cases} (u_i - u_j) \cdot n_{i,e} & \text{si } e = \bar{T}_i \cap \bar{T}_j \\ u_i \cdot n_{i,e} & \text{si } e \in \bar{T}_i \cap \Gamma_3 \\ (u_i + \bar{u}_d^e) \cdot n_{i,e} & \text{si } e \in \bar{T}_i \cap \Gamma_1 \end{cases} \quad (8)$$





$$\text{où } \bar{u}_d^e = \frac{1}{|e|} \int_e u_d ds.$$

Un schéma de volumes finis est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } (u_i)_{i \in I}, (\bar{p}_e)_{e \in \mathcal{E}_h \setminus \Gamma_2}, \text{ tel que} \\ \mathbf{A}_i^{-1} u_i + \frac{1}{|T_i|} \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}_h \\ e \notin \Gamma_2}} h_e \bar{p}_e n_{i,e} = 0 \quad \forall i \in I, \\ [u_h \cdot n]_e = 0 \quad \forall e \in \mathcal{E}_h \setminus \Gamma_2. \end{array} \right.$$

• **Estimation a posteriori**

L'analyse *a posteriori* de cette approximation consiste à obtenir une majoration de l'erreur par la somme Hilbertienne d'indicateurs locaux d'erreur. Les indicateurs obtenus pourront être utilisés pour une stratégie d'adaptation de maillage.

Définissons les deux familles d'indicateurs d'erreurs indexées respectivement par  $e \in \mathcal{E}_h$  et  $T \in \mathcal{T}_h$  comme suit :

$$\eta_e = \|\mathbf{A}\|^{1/2} h_e^{-1/2} \| [p_h]_e \|_{L^2(e)} \quad \text{et} \quad \eta_T = \|\mathbf{A}^{-1/2}(f_h - u_h) - \mathbf{A}^{1/2} \nabla p_h \|_{L^2(T)^2}$$

On introduit la norme discrète associée à celle définie dans (6) et la norme de  $\mathbf{A}$  respectivement, comme suit :

$$\|q\|_{\mathbf{A}_h^*} = \left( \sum_i \int_{T_i} \mathbf{A} \nabla q \nabla q \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{A}\| = \max_{x \in \Omega} (\mathbf{A}_1^2(x) + \mathbf{A}_2^2(x))^{1/2}.$$

**Théorème 1** Il existe des constantes  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  tel que

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\mathbf{A}} + \|p - p_h\|_{\mathbf{A}_h^*} &\leq C_1 \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h \setminus \{\Gamma_2 \cup \Gamma_1\}} \eta_e^2 \right)^{1/2} + C_2 \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + C_3 \|\mathbf{A}^{-1/2}\| \| \|u_{dh} - u_d\| \|_{L^2(\Gamma_1)^2} \\ &\quad + C_4 \|\mathbf{A}^{1/2}\| \left\| \sum_{e \in \Gamma_2} (h_e^{-1/2} \|p_d - p_{dh}\|_{L^2(e)}) \right\| \end{aligned}$$

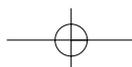
où  $p_{dh}$  est l'interpolé de  $p_d$ .

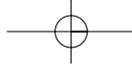
Contrairement aux estimations a priori, les estimations a posteriori permettent de majorer l'erreur commise par une quantité connue dépendante des données du problème, du résidue, des conditions aux limites et des sauts liés à la non conformité de la méthode de discrétisation choisie.

#### 4. Etude de l'équation de transport

Le but de cette partie est la discrétisation de l'équation de transport (1)-(2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div}(r + K f_w(s)u) = 0 \\ K^{-1} r + \nabla \alpha(s) = 0 \\ s = 1 \text{ sur } \Gamma_1, s = 0 \text{ sur } \Gamma_2, r \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \\ s(x, 0) = s_d(x) \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \quad (9)$$





### • Formulation variationnelle

L'intervalle  $[0, T]$  sera divisé en  $N$  sous intervalles  $[t_{n-1}, t_n]$  tel que  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ . Soit  $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ . Une formulation variationnelle de (9) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } s \text{ tel que } \frac{\partial s}{\partial t} \in L^2(\Omega) \text{ et } r \in H_{0,\Gamma_3}(\text{div}, \Omega) \\ \phi \int_{\Omega} \frac{\partial s}{\partial t} v + \int_{\Omega} \text{div } r v + \int_{\Omega} \text{div}(K f_w(s) u) v = 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} K^{-1} r w - \int_{\Omega} \alpha(s) \text{div} w = - \int_{\Gamma_1} \alpha(1) w \cdot n \quad \forall w \in H_{0,\Gamma_3}(\text{div}, \Omega) \end{array} \right. \quad (10)$$

Où  $H_{0,\Gamma_3}(\text{div}, \Omega) = \{w; \text{div } w \in L^2(\Omega) \text{ et } w \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_3\}$ .

Nous utilisons un schéma d'Euler implicite en temps pour approcher  $\frac{\partial s}{\partial t}$ , et nous notons  $s^n = s(t_n)$ ,  $r^n = r(t_n)$  et  $u^n = u(t_n)$ .

Soit une discrétisation du problème (9) (explicite par rapport à la convection  $f$  et implicite par rapport à la diffusion  $r$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \frac{s^n - s^{n-1}}{\tau_n} + \text{div}(r^n + K f_w(s^{n-1}) u^{n-1}) = 0 \text{ dans } \Omega \\ K^{-1} r^n + \nabla \alpha(s^n) = 0 \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \quad (11)$$

### • Discrétisation du problème continu

Pour chaque  $n \in [0, N]$  soit  $\mathcal{T}_h^n$  une triangulation admissible de  $\Omega$  par des triangles.

Le schéma discret est obtenu en intégrant la première équation de (11) sur chaque volume de contrôle  $T_i$ . La deuxième équation est multipliée par une fonction test  $w$  puis intégrée sur  $\Omega$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \int_{T_i} \frac{s^n - s^{n-1}}{\tau_n} + \sum_{\sigma \in \partial T_i} \int_{\sigma} r^n \cdot n_{i,\sigma} + \sum_{\sigma \in \partial T_i} \int_{\sigma} K_{\sigma} f_w(s^n) u^n \cdot n_{i,\sigma} = 0 \quad \forall T_i \in \mathcal{T}_h^n \\ \int_{\Omega} K^{-1} r^n w - \int_{\Omega} \alpha(s^n) \text{div} w = - \int_{\Gamma_1} \alpha(1) w \cdot n \quad \forall w \in H(\text{div}, \Omega) \end{array} \right.$$

\*La saturation  $s$  est approchée dans l'espace des fonctions constantes en temps et en espace sur chaque volumes de contrôles  $T_i \in \mathcal{T}_h^n$  :  $s_h^n|_{T_i} = s_i^n$ .

\*Le calcul de la convection  $f$  sera fait à l'aide d'un schéma décentré amont.

\*Pour approcher  $r$  nous allons utiliser les éléments de Raviart-Thomas d'ordre 0

$$RT0_h = \left\{ v \in H(\text{div}, \Omega) \mid \forall T_i \in \mathcal{T}_h; v|_{T_i} = \begin{pmatrix} ax_1 + b \\ ax_2 + c \end{pmatrix} \right\}$$

Soit  $(w_e)_{e \in \mathcal{E}_h}$  les fonctions de bases de  $RT0_h$ . Prenons  $w = w_e$  dans la deuxième équation de (12), une discretisation globale du problème continu est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \int_{T_i} \frac{s_h^n - s_h^{n-1}}{\tau_n} + \sum_{\sigma \in \partial T_i} \int_{\sigma} r_h^n \cdot n_{i,\sigma} + \sum_{\sigma \in \partial T_i} \int_{\sigma} K_{\sigma} f_w^*(s_h^{n-1}) u_h^{n-1} \cdot n_{i,\sigma} = 0 \quad \forall T_i \in \mathcal{T}_h^n \\ \int_{\Omega} K^{-1} r_h^n \cdot w_e + \int_{\Omega} \alpha(s_h^n) \text{div} w_e = - \int_{\Gamma_1} \alpha(1) w_e \cdot n \end{array} \right.$$

$f_w^*$  est la valeur amont de la mobilité fractionnaire sur chaque arête du triangle  $T_i$  et  $K_{\sigma}$  est la moyenne harmonique :

$$f_w^*(s_h^n) = \begin{cases} f_w(s_j^n) & \text{si } (u^n \cdot n_{\sigma} \leq 0 \text{ et } \sigma = \overline{T_i} \cap \overline{T_j}) \\ f_w(s_i^n) & \text{si } ((u^n \cdot n_{\sigma} \geq 0 \text{ et } \sigma = \overline{T_i} \cap \overline{T_j}) \text{ ou } (\sigma = \overline{T_i} \cap \partial\Omega)) \end{cases}$$



$$K_\sigma = \begin{cases} \frac{K_i K_j}{K_i + K_j} & \text{si } \sigma = \overline{T_i} \cap \overline{T_j} \\ K_i & \text{si } \sigma = \overline{T_i} \cap \partial\Omega \end{cases}$$

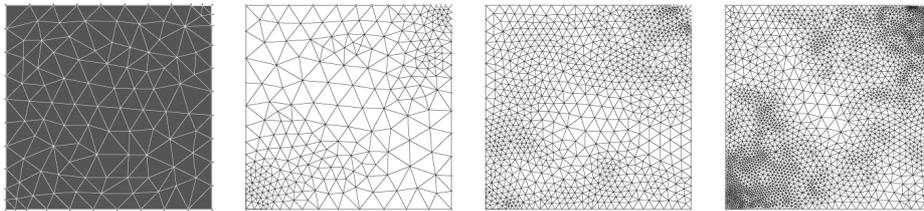
## 5. Tests numériques

Nous considérons le domaine  $\Omega$  comme étant le carré unité  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  avec les paramètres suivants :  $\mu_o = 1.52$ ,  $\mu_w = 1.05$ .  $\lambda_w(s) = \frac{s^2}{\mu_w}$ ,  $\lambda_o(s) = \frac{(1-s)^2}{\mu_o}$  et  $p_c(s) = -\sqrt{\frac{1-s}{s}}$ .  $k_1 = 1$  et  $k_2 = 1$  sont les deux termes du tenseur  $K$ .

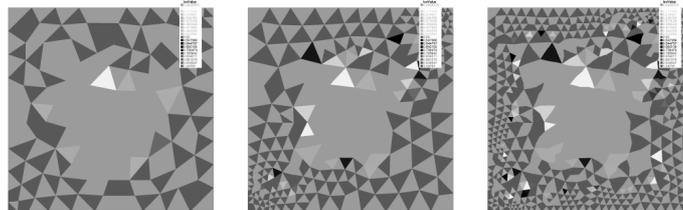
Le principe est, à partir d'un maillage initial, à chaque pas de temps ( $\Delta t = \frac{1}{3}$ ) nous calculons la saturation, la pression et les indicateurs d'erreur et on raffine le maillage dans les régions où ces indicateurs sont plus grand que leur moyenne.

La **Figure 2** et la **Figure 3** illustrent l'évolution de la saturation et du champ de vitesse, respectivement, après avoir injecté une quantité d'eau dans le puit d'injection qui s'étale sur  $\Gamma_1 = ]0, 0.2[ \times \{0\} \cup \{0\} \times ]0, 0.2[$ .

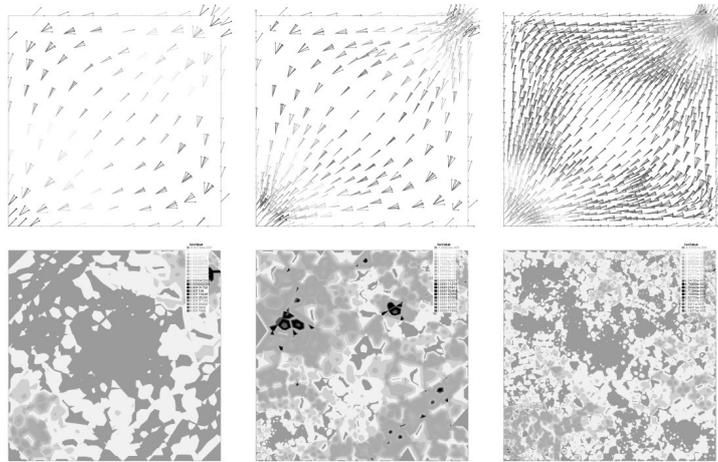
Nous supposons que le puit de production se situe dans le coin droit en haut,  $\Gamma_2 = ]0.8, 1[ \times \{1\} \cup \{1\} \times ]0.8, 1[$  qu'on maintient sous une pression  $p_o = 0$ .



**Figure 1.** Maillage initiale (à gauche) et maillage adapté à  $t = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ .



**Figure 2.** Saturation à  $t = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ .



**Figure 3.** Champ de la vitesse de Darcy et la densité des indicateurs à  $t = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ .

On remarque qu'au cours du temps les indicateurs sont relativement grands dans les régions critiques (les puits d'injection et de production) ce qui explique le fait que le maillage est raffiné dans ces zones. D'autre part on remarque que le front de la saturation avance dans la direction de la vitesse de Darcy. Ces résultats seront améliorés si nous choisissons des espaces de degré plus élevé et si nous introduisons les indicateurs d'erreurs basés sur l'estimation *a posteriori* en temps et en espace pour l'équation de transport. Cette étude est en cours.

**Remerciements :** ce travail est réalisé avec le soutien de l'équipe associée MODESS, INRIA.

## 6. Bibliographie

- [1] I. BABUŠKA, W.C. RHEINBOLDT : « Error estimates for adaptive finite element computations », SIAM J. Numer. Anal. 15, 1978, p. 736-754.
- [2] I. BABUŠKA, W.C. RHEINBOLDT : « A posteriori error estimates for the finite element method », Int. J. Numer. Meth. Engrg. 12, 1978, p. 1597-1615.
- [3] G. CHAVENT, J. JAFFRE, « Mathematical Models and Finite Element for Reservoir Simulation », Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 17. North-Holland. Amsterdam 1986.
- [4] M. CROUZEIX, P.-A. RAVIART, « Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations », R.A.I.R.O. Anal. Numér. 7(R3), 1973, p. 33-76.
- [5] S. EL HASSOUNI, Z. MGHAZLI, « Mesh adaptation via *a posteriori* error estimate for a finite volume scheme for a flow in porous media », to appear in Proceeding of second International Conference MAMERN07, 11-13 July 2007.
- [6] F. HECHT, A. LE HYARIC, K. OHTSUKA, O. PIRONNEAU, « FreeFem++ manual ». Université Pierre et Marie curie, 2007.
- [7] C. MARLE, « Cours de production. Les écoulements polyphasiques en milieu poreux », Tome IV, Edition Technip, 1965.
- [8] R. VERFÜRTH, « A review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques », Wiley and Teubner, 1996.