

Complétion de données frontières

Une méthode quasi-explicite utilisant la méthode de factorisation

F. Jday* — A. Ben Abda* — J. Henry**

* LAMSIN

ENIT, Campus universitaire de Tunis
Tunisie

amel.benabda@enit.rnu.tn

** INRIA-Bordeaux,Sud Ouest

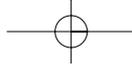
IMB, université Bordeaux I,
351, cours de la libération
33405 TALENCE cedex
FRANCE
jacques.henry@inria.fr

RÉSUMÉ. On considère dans ce travail le problème de complétion de données pour l'équation de Laplace dans un domaine cylindrique $\Omega =]0, a[\times \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n-1}$. $\Gamma_0 = \{0\} \times \mathcal{O}$ et $\Gamma_a = \{a\} \times \mathcal{O}$. On a les données de Neumann et Dirichlet sur Γ_0 et on n'a pas de condition sur Γ_a . Ce problème est donc mal posé au sens de Hadamard. On le reformule en terme de problème de contrôle optimal que l'on régularise. Pour obtenir directement l'évaluation des données manquantes sur Γ_a on a utilisé la méthode de factorisation des problèmes aux limites elliptiques. Cette méthode permet de factoriser un problème aux limites elliptique en le produit de deux problèmes de type parabolique. Elle est ici appliquée au système d'optimalité. Dans le cas du cylindre on obtient une formulation quasi-explicite pour les données complétées. On peut ainsi étudier une nouvelle régularisation et analyser l'effet de la taille du cylindre.

ABSTRACT. We consider in this work the following data completion problem for the Laplace equation in a cylindrical domain. $\Omega =]0, a[\times \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n-1}$. $\Gamma_0 = \{0\} \times \mathcal{O}$ and $\Gamma_a = \{a\} \times \mathcal{O}$. The Neumann and Dirichlet boundary conditions are given on Γ_0 while no condition is given on Γ_a . This problem has been known since Hadamard [5] to be ill-posed. The problem is set as an optimal control problem with a regularized cost function. To obtain directly an approximation of the missing data on Γ_a we used the method of factorization for elliptic boundary value problems. This method allows to factorize a boundary value problem in the product of two parabolic problems. Here it is applied to the optimality system. In the cylinder case one can obtain a quasi explicit formula for the completed data. We present a new regularization and we study the dependence on the size of the cylinder.

MOTS-CLÉS : factorisation de problèmes aux limites, complétion de données

KEYWORDS : Boundary value problems factorization, data completion



1. Introduction

On considère dans ce travail le problème suivant :

$$(P_0) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u = T & \text{sur } \Gamma_0 \\ \nabla u \cdot n = \Phi & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

$\Omega =]0, a[\times \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un ouvert borné et a un réel strictement positif.

$\Sigma =]0, a[\times \partial\mathcal{O}$ la frontière latérale de Ω .

$\Gamma_0 = \{0\} \times \mathcal{O}$, $\Gamma_a = \{a\} \times \mathcal{O}$.

Sur Γ_0 on a les données de Cauchy $(\Phi, T) \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}))' \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$.¹ On n'a pas de condition aux limites sur Γ_a et c'est ces données manquantes que l'on cherche à approcher à l'aide de la condition surabondante sur Γ_0 . Ce problème est donc mal posé au sens de Hadamard. En particulier il n'a de solution que si le couple (Φ, T) est compatible. Ce problème a été traité dans [1], [2], [4] dans un domaine quelconque Ω tel que : $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. [1] traite le problème comme étant un problème de contrôle avec un état doublé chacun des deux états vérifiant l'une des conditions en Γ_0 , les contrôles étant les conditions sur Γ_a . Cette méthode est une méthode itérative donc à chaque nouveau couple (Φ, T) on doit refaire tous les calculs. Dans ce travail on a utilisé la même formulation en terme de problème de contrôle optimal que [1], mais on a ajouté un terme régulateur à la fonction coût pour garantir l'existence et l'unicité de la solution du système d'optimalité [9]. On a ensuite appliqué la méthode de factorisation des problèmes aux limites pour le résoudre. Cette méthode permet de factoriser un problème aux limites elliptique en le produit de deux problèmes de type parabolique. Elle permet de fournir directement les données manquantes pour tout nouveau couple (Φ, T) .

2. La complétion des données comme problème de contrôle optimal

On recherche les données φ, t sur Γ_a qui "complètent" le problème (P_0) ; on aura :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \nabla u \cdot n = \Phi \quad ; \quad u = T & \text{sur } \Gamma_0 \\ u = t \quad ; \quad \nabla u \cdot n = \varphi & \text{sur } \Gamma_a \end{cases}$$

1. On rappelle que l'espace de Sobolev $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$ est défini au théorème 11.7, p 72 de [8] comme l'interpolée d'ordre 1/2 entre $H_0^1(\mathcal{O})$ et $L_2(\mathcal{O})$.





On considère le problème de contrôle optimal suivant :

pour tout $(\eta, \tau) \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})' \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$ l'état est défini par les deux problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_1 = T & \text{sur } \Gamma_0 \\ \nabla u_1 \cdot n = \eta & \text{sur } \Gamma_a \end{array} \right. \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_2 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_2 = \tau & \text{sur } \Gamma_a \\ \nabla u_2 \cdot n = \Phi & \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right. \quad (2)$$

Si (Φ, T) sont compatibles alors $u_1 = u_2$ lorsque $(\eta, \tau) = (\varphi, t)$. On pose ensuite la fonction coût $E(\eta, \tau)$ définie par :

$$E(\eta, \tau) = \int_{\Omega} (\nabla u_1 - \nabla u_2)^2 + \varepsilon (\|\eta\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})')}'^2 + \|\tau\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})}^2),$$

pour tout $(\eta, \tau) \in U_{ad} = (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})') \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$.

On introduit maintenant les états adjoints v_1 et v_2 des problèmes (1) et (2) définis par v_1 et v_2 solutions de :

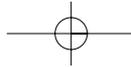
$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_1 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ v_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \nabla v_1 \cdot n = \nabla u_2 \cdot n - \eta & \text{sur } \Gamma_a \end{array} \right. \quad (3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta v_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_2 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ v_2 = u_1|_{\Gamma_a} - \tau & \text{sur } \Gamma_a \\ \nabla v_2 \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right. \quad (4)$$

Le contrôle optimal est caractérisé par la condition d'optimalité du premier ordre

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} (-\Delta_y)^{\frac{1}{2}} v_1|_{\Gamma_a} \text{ et } t = \frac{1}{\varepsilon} (-\Delta_y)^{-\frac{1}{2}} \nabla v_2 \cdot n|_{\Gamma_a}. \quad (5)$$

En éliminant φ et t des équations (1), (2), (3) et (4), on obtient le système d'optimalité





$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_1 = T & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{du_1}{dx} = \frac{1}{\varepsilon}(-\Delta_y)^{\frac{1}{2}}v_1 & \text{sur } \Gamma_a \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_2 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_2 = \frac{1}{\varepsilon}(-\Delta_y)^{-\frac{1}{2}}\frac{dv_2}{dx} & \text{sur } \Gamma_a \\ \frac{du_2}{dx} = \Phi & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (7)$$

$u_1^s|_{\Sigma}$
 $\frac{du_2^s}{dx}$
En
et l

$$\begin{cases} \Delta v_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_1 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ v_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{dv_1}{dx} = \frac{du_2}{dx} - \frac{1}{\varepsilon}(-\Delta_y)^{\frac{1}{2}}v_1 & \text{sur } \Gamma_a \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \Delta v_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_2 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ v_2 = u_1 - \frac{1}{\varepsilon}(-\Delta_y)^{-\frac{1}{2}}\frac{dv_2}{dx} & \text{sur } \Gamma_a \\ \frac{dv_2}{dx} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (9)$$

3.2

Remarquons que dans cette formulation les états et états adjoints ne sont couplés que par les conditions aux limites sur Γ_a .

On

3. Utilisation de la méthode de factorisation pour découpler le système d'optimalité

3.1. Rappel du calcul formel de la méthode de factorisation

A l

Dans cette partie on va appliquer la méthode de plongement invariant développé dans [6], [7] pour le traitement du problème direct au système d'optimalité (6), (7), (8) et (9). On plonge chacun des problèmes (6), (7), (8) et (9) dans une famille de problèmes similaires définis sur Ω_s . L'originalité de l'approche proposée ci-dessous réside dans le choix du "sens" du plongement : le contrôle n'apparaît pas ainsi dans les problèmes posés sur Ω_s . On n'écrit ici que le calcul pour u_1 et u_2 . On impose une condition aux limites respectivement de Neumann : $\frac{du_1^s}{dx}|_{\Gamma_s} = \alpha$, pour (6) et de Dirichlet : $u_2^s|_{\Gamma_s} = \beta$ pour (7).

Cet

$$\begin{cases} \Delta u_1^s = 0 & \text{dans } \Omega_s \\ u_1^s = 0 & \text{sur } \Sigma_s \\ \frac{du_1^s}{dx} = \alpha & \text{sur } \Gamma_s \\ u_1^s = T & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \Delta u_2^s = 0 & \text{dans } \Omega_s \\ u_2^s = 0 & \text{sur } \Sigma_s \\ u_2^s = \beta & \text{sur } \Gamma_s \\ \frac{du_2^s}{dx} = -\Phi & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (11)$$

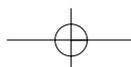
La
son
1) .
2) c
3) t

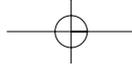
3.3

Les applications Neumann-Dirichlet N-D : $\alpha \mapsto u_1^s|_{\Gamma_s}$ et Dirichlet-Neumann

D-N : $\beta \mapsto \frac{du_2^s}{dx}|_{\Gamma_s}$ sont affines et on a :

l'ai
et p
cor
rap
 u_2 (





$u_1^s|_{\Gamma_s} = P(s)\alpha + \omega_1(s)$, avec $P(s) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})', H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}))$, $P(0) = 0$ et $\omega_1(0) = T$.
 $\frac{du_2^s}{dx}|_{\Gamma_s} = Q(s)\beta + \omega_2(s)$ avec $Q(s) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}), H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})')$, $Q(0) = 0$ et $\omega_2(0) = -\Phi$.
 En nous référant à [6], [7] on peut montrer par un simple calcul que les opérateurs P et Q et les fonctions ω_1 et ω_2 vérifient les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} -I + \frac{dP}{dx} - P\Delta_y P = 0 & P(0) = 0 \\ -P\Delta_y \omega_1(x) + \frac{d\omega_1}{dx} = 0 & \omega_1(0) = T \end{cases} \quad (12) \quad \begin{cases} \Delta_y + \frac{dQ}{dx} + Q^2 = 0 & Q(0) = 0 \\ Q\omega_2 + \frac{d\omega_2}{dx} = 0 & \omega_2(0) = -\Phi \end{cases} \quad (13)$$

(9)

3.2. Découplage sur Γ_a

On pose

$$A = \begin{pmatrix} P & -PQ \\ -PQ & Q \end{pmatrix}$$

On montre que

$$E(\eta, \tau) = \text{constante} + (\eta, \tau)A(\eta, \tau)' - 2 \int_{\Gamma_a} (Q\omega_1\tau + P\omega_2\eta)$$

A l'optimum

$$A(\varphi, t) = (P\omega_2, Q\omega_1)$$

Cette relation est équivalente à

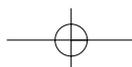
$$(I - PQ)t = P\omega_2 + \omega_1 \text{ et } (I - QP)\varphi = Q\omega_1 + \omega_2$$

La compatibilité des données (Φ, T) est caractérisée par les trois assertions suivantes qui sont équivalentes

- 1) $P\omega_2 + \omega_1 \in \mathfrak{S}(I - PQ)$
- 2) $\omega_2 + Q\omega_1 \in \mathfrak{S}(I - QP)$
- 3) $(P\omega_2, Q\omega_1)' \in \mathfrak{S}(A)$

3.3. Lien avec l'opérateur Steklov-Poincaré

Dans cette partie on présente le lien entre l'approche précédente et les calculs de [2] à l'aide de l'opérateur de Steklov-Poincaré. Pour un couple $(\Phi, T) \in H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$ et pour tout $\tau \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$, on considère le problème (1), (2), où l'on contrôle u_1 par la condition de Dirichlet : $u_1 = \tau$ sur Γ_a . On note les solutions $u_1(\tau, T)$ et $u_2(\tau, \Phi)$ pour rappeler les dépendances par rapport aux contrôles et aux données. On note $u_1(\tau, 0)$ (resp $u_2(\tau, 0)$) par $u_1(\tau)$ (resp $u_2(\tau)$)





et $u_1(0, T)$ (resp $u_2(0, \Phi)$) par $u_1^0(\tau)$ (resp $u_2^0(\tau)$). On introduit maintenant les formes bilinéaires $S(\cdot, \cdot)$, $S_D(\cdot, \cdot)$ et $S_N(\cdot, \cdot)$ sur $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$ et la forme linéaire l sur $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$ définies par pour tout $\tau, \delta \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$

$$S(\tau, \delta) = S_D(\tau, \delta) - S_N(\tau, \delta) = \int_{\Omega} \nabla u_1(\tau) \nabla u_1(\delta) dx - \int_{\Omega} \nabla u_2(\tau) \nabla u_2(\delta) dx,$$

$$l(\delta) = - \int_{\Omega} \nabla u_1^0(T) \nabla u_1(\delta) dx + \int_{\Omega} \nabla u_2^0(\Phi) \nabla u_2(\delta) dx - (\Phi, u_2(\delta))_{L^2(\Gamma_0)}.$$

Trouver $t \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$ tel que $\nabla u_1(t) = \nabla u_2(t)$ sur la face Γ_a est équivalent à trouver $t \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$ vérifiant

$$S(t, \delta) = l(\delta) \quad \text{pour tout } \delta \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a).$$

Ces formes bilinéaires et linéaires sont reliées aux équations de Riccati (12), (13) par

$$S_N(\tau, \delta) = (Q\tau, \delta), \quad S_D(\tau, \delta) = (P^{-1}\tau, \delta),$$

$$S(\tau, \delta) = ((P^{-1} - Q)\tau, \delta), \quad l(\delta) = (P^{-1}w_1 + w_2, \delta),$$

pour tout $\tau, \delta \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$.

4. Formulation explicite dans le cas d'un cylindre

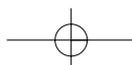
4.1. Détermination de l'opérateur $I - PQ$

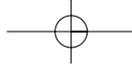
Dans cette partie on va traiter le problème (P_0) dans le cas où Ω est un cylindre. Dans ce cas particulier, on peut intégrer explicitement les équations de Riccati et déterminer les opérateurs Neumann-Dirichlet et Dirichlet-Neumann sur la face Γ_a .

$$Q(x) = (-\Delta_y)^{\frac{1}{2}} (I - \exp(-2(-\Delta_y)^{\frac{1}{2}}x)) (I + \exp(-2(-\Delta_y)^{\frac{1}{2}}x))^{-1},$$

$$P(x) = (-\Delta_y)^{-1} Q(x),$$

$$R(x) = I - P(x)Q(x) = I - Q(x)P(x) = 4 \exp(-2(-\Delta_y)^{\frac{1}{2}}x) (\exp(-2(-\Delta_y)^{\frac{1}{2}}x) + I)^{-2}.$$





4.2. Influence de la longueur du cylindre

Si les données (Φ, T) sont compatibles la solution du problème (P_0) est

$$(R(a)^{-1}(P(a)w_2(a) + w_1(a)), R(a)^{-1}(w_2(a) + Q(a)w_1(a))).$$

Soit $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\alpha_n > 0$ le spectre de $(-\Delta_y)^{\frac{1}{2}}$. La suite (α_n) est croissante et tend vers l'infini. On pose

$$S(a) = P^{-1}(a) - Q(a).$$

Donc le spectre de $R(a)$ est donné par

$$\left\{ \frac{4e^{-2\alpha_n a}}{(1 + e^{2\alpha_n a})^2} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

et celui de $S(a)$ par

$$\left\{ \alpha_n \frac{4e^{-2\alpha_n a}}{1 - e^{-4\alpha_n a}} \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

On remarque que ces suites décroissent vers 0 exponentiellement quand n tend vers l'infini, et ça explique le caractère mal posé du problème inverse (P_0) .

On remarque aussi que si la longueur du cylindre a croît la vitesse de convergence de ces suites vers 0 augmente. Ces formules permettent donc de quantifier le caractère mal posé du problème inverse en fonction de la longueur du cylindre, c'est-à-dire de la distance entre la surface où les données sont surabondantes et celle où elles sont manquantes.

4.3. Régularisation du problème

Commençons par présenter la régularisation de [2]

$$S(t, \delta) + \varepsilon S_D(t, \delta) = l(\delta) \quad \text{pour tout } \delta \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a).$$

Dans notre formulation cette régularisation devient

$$(P^{-1} - Q)t + \varepsilon P^{-1}t = w_2 + P^{-1}w_1.$$

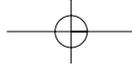
Supposons que, de façon classique, le paramètre ε soit fixé en fonction du niveau du bruit sur les mesures en Γ_0 . Il est clair que l'on ne pourra calculer valablement que les composantes de t correspondant à des valeurs propres de S supérieures à celles du terme de régularisation εP^{-1} .

Posons $d = \frac{2 - \varepsilon + \sqrt{(2 - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$.

Les modes qu'il est possible de calculer après cette régularisation sont ceux tels que

$$\alpha_n \leq \frac{1}{2a} \log(d).$$





On constate donc que si a croît le nombre de modes qu'il est possible de calculer diminue. On constate de plus que le terme $\varepsilon \alpha_n \frac{1+e^{-2\alpha_n a}}{1-e^{-2\alpha_n a}}$ de régularisation devient singulier si $a \rightarrow 0$. Nous proposons dans ce travail, une autre régularisation qui n'a pas cet inconvénient. On ajoute $\frac{\varepsilon}{2} (\|u_2(a)\|^2 + \|\nabla u_1(a) \cdot n\|^2)$ à la fonction coût. Donc la fonction devient

$$E_\varepsilon(\eta, \tau) = E(\eta, \tau) + \frac{\varepsilon}{2} \|\eta\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_a)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\tau\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)}^2$$

Le système linéaire permettant de calculer l'estimée t est maintenant

$$(I - PQ + \frac{\varepsilon}{2} (-\Delta_y)^{\frac{1}{2}} P + \frac{\varepsilon}{2} (-\Delta_y)^{-\frac{1}{2}} Q + \frac{\varepsilon^2}{4} (-\Delta_y) PQ) t = Pw_2 + w_1 + \frac{\varepsilon}{2} (-\Delta_y)^{-\frac{1}{2}} P^{-1} w_1.$$

Cette régularisation conduit à ajouter à $R(a)$ le terme $\varepsilon (-\Delta_y)^{\frac{1}{2}} P + \frac{\varepsilon^2}{4} (-\Delta_y) PQ$. Par le même type de calcul que précédemment et en négligeant les termes en ε^2 , on montre que si l'on pose $d' = \frac{2 + \sqrt{4 + \varepsilon^2}}{\varepsilon}$, on détermine encore les modes calculables par

$$\alpha_n \leq \frac{1}{2a} \log(d').$$

Comme $d' > d$ on peut espérer estimer plus de modes par cette méthode. Cela est d'autant plus vrai que a est petit.

5. Bibliographie

- [1] S. Andrieux, T.N. Baranger and A. Ben Abda. *Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional* (Institut of Physics Publishing)
- [2] M. Azaiez, F. Ben Belgacem, H. El Fekih *On Cauchy's problem : II. Completion, regularization and approximation* Inverse Problems, 21, 6, pp 1915-1936 (2006)
- [3] Bellman, R. (1957), *Dynamic Programming* . Princeton University Press.
- [4] A. Chakib and A. Nachaoui. *Convergence analysis for finite element approximation to an inverse Cauchy problem*
- [5] Hadamard J 1953 *Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Equation* (New York : Dover).
- [6] J. Henry, A. Ramos, *Factorization of second order elliptic boundary value problems by dynamic programming* Nonlinear Analysis 59 (2004) 629-647.
- [7] J. Henry, A. Ramos, *A Direct Study of the Riccati Equation Appearing in a Factorization Method of Second Order Elliptic Boundary Value Problems by Dynamic Programming* Nonlinear Analysis (2007).
- [8] Lions J.L., and Magenes E. (1968). *Problèmes aux limites Non homogènes et Applications*, Voll. Dunod
- [9] Lions J.L., (1968) *Contrôle Optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées Partielles*, Voll. Dunod

