Exit Chart pour le décodage à seuil itératif des codes à logique majoritaire

Mohamed Lahmer Mostafa Belkasmi

EST, BP. 3103, Meknes ENSIAS, Rabat

MAROC MAROC

<u>lahmer@est-umi.ac.ma</u> belkasmi@ensias.ma

RESUME. Nous présentons dans cet article une analyse du comportement de convergence du décodage à seuil itératif des codes concaténés construit à partir des codes à logique majoritaire décodable en une étape. Pour cela nous appliquons une technique semi analytique appelée Exit Chart, à l'origine développée pour analyser les Turbo codes. Les seuils obtenus sur un canal de Gauss constituent un bon indicateur de la région de chute des courbes BER.

ABSTRACT. In this paper we analyse convergence behaviour of iterative threshold decoding of concatenated codes built from one step majority logic decodable codes. We show how a semi-analytical technique called Exit Chart, which was originally developed to analyze Turbo codes can be used to predict the convergence threshold of serially concatenated codes transmitted over a Gaussian channel.

MOTS-CLÉS : décodage à seuil itératif, codes à logique majoritaire, codes concaténés, Exit Chart.

KEYWORDS: iterative threshold decoding, one step majority logic decodable code, concatenated codes, Exit Chart.

1. Introduction

Récemment, différentes techniques ont été proposées dans la littérature pour analyser le décodage itératif des codes concaténés [6-9]. La plus utilisée des méthodes est sûrement celle basée sur l'information mutuelle connue sous le nom de l'Exit (EXtrinsic Information Transfer) Chart. Depuis son introduction par S. Ten Brink [6], l'Exit Chart est devenue un outil incontournable pour l'estimation des seuils de convergence et le design des codes concaténés. Cette technique offre l'avantage d'être moins coûteuse en terme de calcul par rapport à la simulation (BER chart). En effet, il a été montré par simulation (cas d'une trame de taille assez grande) [10] que le modèle suivi par les extrinsèques échangés entre les décodeurs est gaussien. Par ailleurs, l'étude d'un seul décodeur est suffisante pour prévoir les performances du décodage itératif. L'objectif de ce travail est d'appliquer l'Exit Chart pour analyser le comportement de convergence du décodage à seuil itératif des codes à décodage majoritaire en une étape [1-3].

L'organisation de cet article est comme suit : La section 2 décrit le processus de décodage à seuil itératif. Dans la section 3 Nous commençons par la présentation du principe de calcul de l'Exit Chart et on terminera par l'analyse du comportement de convergence des codes concaténés. La section 4 donne quelques conclusions.

2. Décodage à seuil itératif

2.1 Soft Input Soft Output du décodage à seuil

Considérons la transmission d'un mot de code C(n,k,d) binaire sur un canal AWGN moyennant une modulation BPSK. La décision « soft-out » associée au j^{ième} bit du mot reçue R (r_1,r_2,\ldots,r_n) peut être formulée par :

$$LLR_{j} = \underbrace{\frac{4E_{s}}{N_{0}}r_{j}}_{\text{Soft in}} + \underbrace{Le_{j}}_{\text{Information extrinsèque}}$$
(1)

$$Le_{j} = \sum_{i=1}^{J} \ln \left[\frac{1 + \prod_{k=1}^{n_{i}} \tanh(L_{ik} / 2)}{1 - \prod_{k=1}^{n_{i}} \tanh(L_{ik} / 2)} \right]$$
(2)

Où J est le nombre d'équations orthogonales du code C, les n_i représentent le nombre des éléments de la i^{ième} équation orthogonale, ik est l'indice du $k^{ième}$ élément et

$$L_{ik} = \frac{4E_s}{N_0} r_{ik} \tag{3}$$

La structure de notre algorithme SISO lorsqu'il est appliqué aux codes à logique majoritaire décodable en une étape peut être résumée comme suit :

Pour chaque bit reçu r_i , j=1,...,n

- Calculer l'information extrinsèque Le_i selon (2)
- Calculer le Soft-output par: $LLR_j = (4E_s/N_0)r_j + Le_j$
- Corriger r_i

2.2 Décodage à seuil itératif

Le processus de décodage itératif que nous utilisons suit le modèle proposé par Pyndiah dans [4] (voir figure 1). Considérons le décodage des lignes et des colonnes d'un code concaténé (voir table 1) sur un canal gaussien en utilisant la modulation BPSK. À la réception de la matrice [R] correspondant à un mot de code transmis [C], le premier décodeur exécute le décodage SISO à seuil des lignes en utilisant comme matrice d'entrée [R]. L'information extrinsèque générée est réinjectée avec un facteur de pondération $\alpha(q)$ dans l'entrée du deuxième décodeur (colonnes).

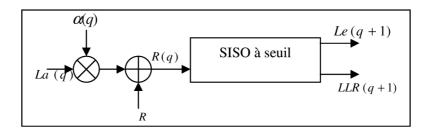


Figure 1. Processus de décodage itératif

Le soft input respectivement le soft output de la $q^{i \hat{e} m e}$ étape de décodage itératif sont données par :

$$R(q) = R + \alpha(q)L\alpha(q) \tag{4}$$

$$LLR(q+1) = \frac{4E_s}{N_0}R(q) + Le(q+1)$$
 (5)

Où R représente les lignes du mot reçu et La(q) l'information extrinsèque calculée par le décodeur précédent (colonnes). Dans notre algorithme et contrairement à Pyndiah [4], nous utilisons la valeur 1/J pour $\alpha(q)$ et ce pour toutes les itérations.

La table 1 représente quelques codes construits à partir de la concaténation des codes à décodage majoritaire en une étape. Dans cette table nous avons employé l'abréviation DSC pour des codes à ensemble de différence, EG pour les codes à géométrie euclidienne et BCH pour les codes de Bose, Chaudhuri et Hocquenghem.

Code concaténé	Code (C ^I)	Code (C^2)	Taux
PC (441,121)	DSC (21,11)	DSC (21,21)	0.27
PC (1533,495)	DSC (21,11)	DSC (73,45)	0.32
PC (4095,1337)	BCH (15,7)	DSC (273,191)	0.32
PC (3969,1369)	EG (63,37)	EG (63,37)	0,34
PC (5329,2025)	DSC (73,45)	DSC (73,45)	0.37
PC (19929, 8595)	DSC (73,45)	DSC (273,191)	0.43
PCB (17633,8595)	DSC (73,45)	DSC (273,191)	0.48
PC (74529,36481)	DSC (273,191)	DSC (273,191)	0.49

Table 1. Exemple de codes concaténés

Nous tenons à insister sur le fait que notre algorithme peut être appliqué aux codes à décodage majoritaire simple [3], les codes concaténés série (PC) [2] ou parallèle (PCB) [1] et les résultats obtenus sont très encourageants. En effet dans [3] nous avons montré que notre algorithme a un bon compromis entre la complexité et les performances comparé à l'algorithme de propagation de croyance (BP). Par exemple pour le code DSC (273,191) notre algorithme est 5 fois plus rapide que le BP.

La figure 2a représente les performances du code concaténé en parallèle PCB (17633,8595) construit à partir des codes composants DSC (73,45) et DSC (273,191). A un BER de 10⁻⁵ on est à 1.8 dB seulement de la limite de Shannon [3].

Dans la figure 2b les performances de décodage à seuil itératif sont comparés aux résultats publiés dans [5] pour le code PCB (4545, 2025). A un BER de 10⁻⁴ on gagne 0.45 dB par rapport à leurs résultats.

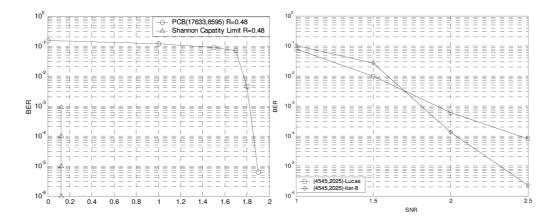


Figure 2a. Exit charts du code (74529,36481) ainsi que la trajectoire du décodage itératif sur un canal de Gauss.

Figure 2b. Performance du décodage itératif du code produit (74529,36481) sur un canal de Gauss

3. Analyse du comportement de convergence

3.1 Modèle de calcul de l'Exit Chart

L'EXIT Chart est un outil (semi analytique) développé à l'origine par S. Ten Brink [6] permettant de visualiser la trajectoire d'un décodage itératif. Ces courbes sont obtenues en traçant l'échange d'information mutuelle entre l'entrée et la sortie des constituants du décodeur. La figure 3 décrit la chaîne de simulation à mettre en oeuvre en simulant le rôle du second décodeur (décodeur de l'étape précédente dans le cas d'un code simple) par la mise à jour de l'a priori. D'un autre côté et contrairement aux Turbo codes, l'information extrinsèque échangée entre les décodeurs élémentaires d'un code produit est calculée sur les bits systématiques et la redondance. Par conséquent nous nous intéressons à l'information mutuelle entre les bits d'information après codage et les LLR (Loglike Lihood Ratio) des extrinsèques (voir figure 3). Notons par U{+1,-1} l'élément binaire à l'entrée d'un canal AWGN et L_{CH} la sortie correspondante exprimée sous forme de LLR. On peut facilement démontrer que L_{CH} est Gaussienne de paramètres N $(2/\sigma^2,4/\sigma^2)$ avec $\sigma^2 = N_0/2E_s$. Sous l'hypothèse que la LLR a priori L_A suit une distribution gaussienne on a : $L_A = \mu U + \eta$ où $\mu = \sigma_A^2/2$ et η une variable gaussienne de moyenne nul et de variance σ_A^2 . L'information mutuelle $I(L_A,U)$ entre L_A

et U peut être exprimée par :

$$I_{A}(\sigma_{A}) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-((\xi - \sigma_{A}^{2}/2)^{2})/2\sigma_{A}^{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{A}} Log_{2}(1 + e^{-\xi})d\xi$$
(12)

On pose
$$\sigma_A = J^{-1}(I_A)$$
, (13)

Avec $\lim_{\sigma \to \infty} J(\sigma) = 1$ et $\lim_{\sigma \to 0} J(\sigma) = 0$. La fonction J est monotone croissante et peut

être calculée numériquement. D'autre part l'information mutuelle entre la LLR de l'extrinsèque L_{E} et U est :

$$I_{E} = 1 - \int_{R} p_{E}(\xi/U = 1) \cdot \log_{2}(1 + e^{-\xi}) d\xi$$
 (14)

Il est impossible d'exprimer cette relation sous forme analytique, la valeur de cette intégrale est calculée par simulation en utilisant la méthode de Monte-Carlo. L'Exit Chart est définie comme étant la courbe de représentation de la fonction de transfert

$$I_E = T \left(I_A, \frac{E_b}{N_0} \right) \tag{15}$$

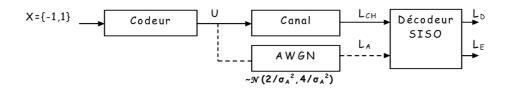


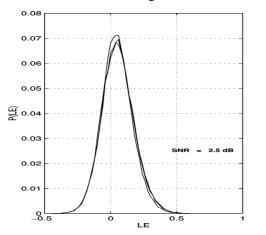
Figure 3. Modèle de calcul de l'EXIT

3.2 Analyse du comportement de convergence

A fin de garantir une bonne approximation de l'Exit chart, il est commode de travailler avec des blocs de taille de l'ordre de 10⁵. Néanmoins, l'approximation de la distribution des informations extrinsèques par une gaussienne est aussi vérifiée dans le cas des codes à longueur finie (figure 4). Cette supposition va nous permettre de valider les courbes des Exits Charts par rapports aux courbes du BER.

La figure 4 montre l'évolution de la distribution de l'information extrinsèque à la sortie du décodeur SISO à seuil du code PC (74529,36481). Nous avons simulé l'envoi d'une trame sans aucune approximation. En dessous d'une valeur seuil du SNR, l'information extrinsèque n'évolue plus en fonction des itérations. Pour cette gamme de valeurs du SNR le processus de décodage converge vers un BER fini non nul et ceci

même après un nombre infini d'itérations. La figure 5a représente les courbes de l'Exit Chart du code produit (74529,36481) pour les SNR 2.5, 3, 3.15 et 3.5 dB. Pour SNR=3.15, la trajectoire de décodage entre dans une région de tunnel [6] près de la bissectrice avec un ralentissement caractéristique de la vitesse de convergence. Le seuil obtenu par l'Exit Chart est à 0.25 par rapport au point du début de chute des courbes du BER (voir figure 5b). A titre indicatif la marge d'erreur entre le seuil estimé par l'Exit et celui obtenu par les courbes du BER est due essentiellement au fait que nous travaillons avec des trames de longueur finie.



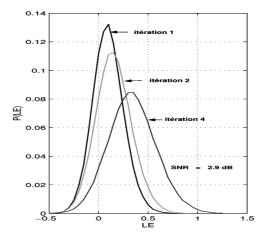


Figure 4. Evolution de la distribution de la LLR de l'extrinsèque L_E en fonction des itérations, SNR=2.5 et 2.9 dB, itérations 1, 2 et 4.

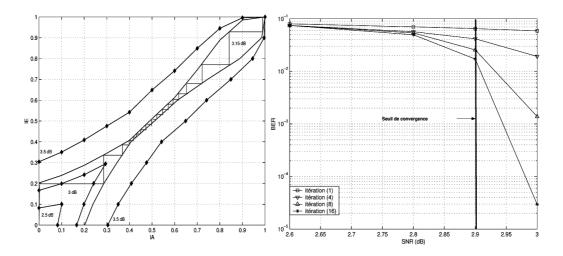


Figure 5a. Exit charts du code (74529,36481) ainsi que la trajectoire du décodage itératif sur un canal de Gauss.

Figure 5b. Performance du décodage itératif du code produit (74529,36481) sur un canal de Gauss

4. Conclusion

Nous avons présenté dans le présent article une analyse du comportement de convergence du décodage à seuil itératif en appliquant l'EXIT Chart. Le seuil de convergence obtenue pour les codes concaténés construit à partir des codes à décodage majoritaire est un bon indicateur de la région de chute du BER. Comme travaux futurs, nous pensons étudier les avantages d'une concaténation d'un code à décodage majoritaire avec d'autres codes par exemple le code convolutionnel de taux 1.

Références

- [1] M. Belkasmi, M. Lahmer, and M. Benchrifa, "Iterative Threshold Decoding of Parallel Concatenated Block Codes," Proceeding Turbo Coding 2006 Conf.,4-7 April 2006, Munich.
- [2] M. Belkasmi, M. Lahmer, and F. Ayoub, "Iterative Threshold Decoding of Product Codes Constructed from Majority Logic Decodable Codes," ICTTA'06 Conf., 24-28 April 2006, Damascus Syrie, pp. 2376- 2381
- [3] M. Lahmer, M. Belkasmi, "Iterative Threshold Decoding of One Step Majority Logic Decodable block Codes," December 15-18, 2007, Cairo, Egypt
- [4] R. Pyndiah, "Near-Optimum Decoding of Product Codes: Block Turbo Codes," IEEE Trans. Commun., Aug. 1998, Vol. 46, N° 8, pp. 1003-1010
- [5] R. Lucas, M. Bossert and M. Breitbach, "On Iterative Soft-Decision Decoding of Linear Binary Block Codes and Product Codes," IEEE Journal on selected areas in communications, February 1998, Vol. 16, N° 2, pp. 276-296.
- [6] S. ten Brink, "Convergence of iterative decoding," Electronics Letters, pp. 806-808, vol. 35, no. 10, May 1999.
- [7] T. Richardson and R. Urbanke, "Thresholds for turbo codes", Proc. ISIT 2000, vol. 10, p. 317, Sorrento, Italy, June 2000
- [8] T.J. Richardson and R.L. Urbanke, "The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 47, no. 2, pp. 599-618, February 2001.
- [9] F. Lehmann, "Les Systèmes de Décodage Itératif et leurs Applications aux Modems Filaires et Non-Filaires", Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, octobre 2002
- [10] C. Berrou, A. Glavieux and P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes," IEEE Int. Conf. on Comm. ICC'93, Geneva, May 1993, pp. 1064-1071.