

Approximation harmonique dans une couronne, application à l'identification de fissures

Mohamed Jaoua ^{*}, Juliette Leblond ^{**}, Moncef Mahjoub ^{***}

^{*} Mohamed Jaoua
Laboratoire J.-A. Dieudonné, Université de Nice Sophia Antipolis
Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex
France
jaoua@math.unice.fr

^{**} Juliette Leblond
INRIA Sophia Antipolis Méditerranée
BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex
France
juliette.leblond@sophia.inria.fr

^{***} Moncef Mahjoub
ENIT-LAMSIN
BP 37, 1002 Tunis-le Belvédère
Tunisie
moncef.mahjoub@lamsin.rnu.tn

RÉSUMÉ. On s'intéresse à un problème d'identification de fissures portées par une interface circulaire dans un domaine annulaire G . On suppose que l'on dispose de données de Neumann et Dirichlet sur une partie de la frontière qui intersecte les deux composantes connexes de celle ∂G du domaine, pour une solution de l'équation de Laplace dans le domaine privé de la fissure. Par extension de ces données depuis les parties internes et externes de ∂G , en résolvant les problèmes de Cauchy associés sur deux anneaux, on localise les fissures portées par un cercle intérieur de G . En utilisant une technique d'approximation harmonique dans les classes de Hardy, nous présentons un schéma constructif et robuste d'identification, validé par des résultats numériques.

ABSTRACT. We are interested with an inverse interfacial crack problem in annular domains, for Laplace equation and from overdetermined boundary data. Using tools from complex analysis and best approximation in Hardy classes, we present constructive and robust identification schemes validated by a thorough numerical study.

MOTS-CLÉS : Problème inverse, problème de Cauchy, identification de fissures, espaces de Hardy, problème extrémal borné, opérateur de Laplace.

KEYWORDS : Inverse problems; Cauchy problem; cracks identification; Hardy spaces, bounded extremal problem, Laplace operator.

1. Introduction

Ce travail est consacré à l'identification et à la détection de fissures circulaires dans les sections planes d'un tuyau à partir de mesures surdéterminées sur sa frontière, par des techniques d'approximation harmonique [3, 9]. La résolution de problèmes extrémaux bornés fournit un outil adéquat pour l'extension des données et permet ainsi de localiser des fissures à l'intérieur d'un domaine annulaire.

Ces problèmes interviennent dans nombreuses applications industrielles relevant du contrôle non destructif (imagerie et tomographie, prospection de sous-sols, surveillance, par exemple), pour la détection de défauts. Cette étude se limite aux phénomènes régis par l'équation de Laplace en dimension 2 (ou, le cas échéant, dans des sections planes de tuyaux ou de milieux composites cylindriques). On suppose que l'on dispose de la trace, sur la frontière, d'une solution (température, dans le contexte thermique) u de l'équation de Laplace dans une couronne $G = \mathbb{D} \setminus s\overline{\mathbb{D}}$, $0 < s < 1$, privée d'une éventuelle fissure σ , ainsi que de la donnée d'une condition de Neumann (flux de chaleur) sur $K \subset \partial G$ tel que $K \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, $K \cap s\mathbb{T} \neq \emptyset$. L'application visée par cette étude est la détermination du cercle hôte portant σ et l'identification de σ au travers de celle du saut de discontinuité de température au travers.

Dans la littérature, des résultats d'unicité ont été prouvés dans [8], où une étude numérique est présentée dans le cas de plusieurs fissures. Dans les cas bi et tridimensionnels, pour des données disponibles sur toute la frontière de la structure, la mesure au bord de l'écart à la réciprocité permet d'identifier des fissures planes ou droites [2]. Des formules d'inversion déterminent explicitement le plan ou la droite contenant les fissures afin de les identifier (voir aussi [5, 7]).

Dans le présent travail, nous proposons une méthode d'identification de fissures basée sur une technique de complétion de données par approximation sous contrainte, régularisante et non itérative (elle ne nécessite pas de résolution du problème direct), très peu coûteuse. Cette approche de régularisation est basée sur la construction d'extensions/approximations analytiques, pour laquelle un cadre fonctionnel approprié est fourni par les espaces de Hardy de la couronne (fonctions analytiques dans G et bornées en norme L^p sur les cercles). Le principe est d'exploiter les propriétés classiques des fonctions harmoniques et analytiques (conjugaison harmonique, équation de Cauchy-Riemann) pour reformuler le problème inverse d'identification en termes de reconstruction d'une fonction analytique dans le domaine, depuis ses valeurs sur la frontière [10, 11].

2. Position du problème

Soit $\mathbb{D}$ le disque unité et $\mathbb{T}$ le cercle unité. On note G l'anneau défini par $G = \mathbb{D} \setminus s\overline{\mathbb{D}}$ pour $0 < s < 1$ fixé. Supposons que G contient une ou plusieurs fissures portées par un cercle $\lambda\mathbb{T}$, de centre l'origine, et de rayon λ inconnu, $s < \lambda < 1$. Le problème modèle correspondant est donné par :

$$(PI) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } G \setminus \sigma \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \sigma \subset \lambda\mathbb{T} \\ \partial_n u = \Phi \in L^2(K) & \text{sur } K \subset \partial G \end{cases}$$

avec la donnée surdéterminée $u = f \in L^2(K)$ sur $K \subset \partial G$.

Les conditions $\int_K \Phi d\theta = 0$ et $\int_K f d\theta = 0$ assurent l'existence et l'unicité de la solution.

L'objectif est d'identifier σ à partir des données Φ et f sur $K \subset \partial G$, tel que $K \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, $K \cap s\mathbb{T} \neq \emptyset$. L'approche proposée consiste à exprimer les propriétés d'harmonicité et de régularité de u_σ dans $G \setminus \sigma$ en termes d'analyticité et de bornitude d'une certaine fonction de la variable complexe z (on fait l'identification $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \leftrightarrow z = x + iy \in \mathbb{C}$), donnée sur $K \subset \partial G$ accessible depuis les mesures par ($r \in \{s, 1\}$) :

$$F(re^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) + i \int_{e^{i\theta_0}}^{e^{i\theta}} \Phi(re^{i\tau}) d\tau, \quad re^{i\theta}, re^{i\theta_0} \in K.$$

Si l'on désigne par $H^2(G)$ l'espace de Hardy de la couronne G des fonctions analytiques dans G et bornées dans $L^2(r\mathbb{T})$ pour tout $r \in (s, 1)$, le problème inverse (PI) peut se formuler comme :

étant donnée des mesures sur $K \subset \partial G$ d'une fonction F appartenant à l'espace de Hardy $H^2(G)$, trouver l'extension g de F à ∂G ,

ou plutôt, pour être robuste aux erreurs de mesure, sous forme d'un problème extrémal borné (BEP) :

étant donnée des mesures sur $K \subset \partial G$ d'une fonction F , trouver son meilleur approximant g dans $H^2(G)$ en norme $L^2(K)$, vérifiant une contrainte en norme sur $\partial G \setminus K$.

L'idée consiste à supposer en premier temps que le cercle porteur de la fissure est connu et exprimer ce problème inverse en termes d'approximation harmonique dans deux couronnes pour étendre les données sur le cercle $\lambda\mathbb{T}$. On décompose alors la couronne G en deux sous-couronnes $G_1 = \mathbb{D} \setminus \lambda\overline{\mathbb{D}}$ et $G_2 = \lambda\mathbb{D} \setminus s\overline{\mathbb{D}}$.

L'extension des données dans G_1 et G_2 à partir de la résolution de deux problèmes extrémaux bornés associés, depuis les valeurs de F sur $K_1 = K \cap \mathbb{T}$ et $K_2 = K \cap s\mathbb{T}$, respectivement, permet d'identifier complètement la fissure σ comme support de la discontinuité de u au travers de $\lambda\mathbb{T}$.

Pour déterminer le rayon λ , on introduit un cercle quelconque $r\mathbb{T}$, $s < r < 1$ et on applique la technique d'approximation harmonique dans les deux couronnes $G_r = \mathbb{D} \setminus r\overline{\mathbb{D}}$ et $G_s = r\mathbb{D} \setminus s\overline{\mathbb{D}}$; si $r < \lambda$, alors l'erreur d'approximation sur K_1 par des fonctions de $H^2(G_r)$ est importante, puisque $\sigma \subset G_r$ et que la fonction F n'est pas la trace sur K_1 d'une fonction analytique dans G_r , tandis que l'erreur dans $H^2(G_s)$ depuis F sur K_2 reste petite. Un raisonnement analogue, si $r > \lambda$, montre que les erreurs des deux cotés jouent un rôle inverse l'une de l'autre. On itère ainsi le processus en variant r et en calculant les erreurs d'approximation sur K_1 et K_2 jusqu'elles se tiennent petites en même temps, lorsque $r \simeq \lambda$.

3. Problème extrémal borné

Dans ce paragraphe, on introduit les problèmes extrémaux bornés (BEP). Lorsque F est donnée sur toute la frontière externe $\mathbb{T}$ d'un domaine annulaire $G_r = \mathbb{D} \setminus r\overline{\mathbb{D}}$, $0 < r < 1$, puisque il est non simplement connexe, F peut n'être pas définie globalement sur G_r comme une fonction mono-valuée. Dans ce cas, d'après [11], il existe une fonction analytique mono-valuée $\tilde{F}$ définie dans G_r telle que

$$\tilde{F}(z) = F(z) - \frac{c}{2\pi} \log z,$$

donc $u_\sigma(z) = \operatorname{Re} \tilde{F}(z) + \frac{c}{2\pi} \log |z|$, où

$$c = \int_0^{2\pi} \Phi(e^{i\theta}) d\theta. \quad (1)$$

Dans la suite, et pour simplifier, on posera $\tilde{F} = F$. L'espace de Hardy $H^2(G_r)$ est un espace de Hilbert muni de la norme $L^2(\partial G_r)$:

$$\|g\|_{H^2(G)} = \|g\|_{L^2(\partial G)} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} |g_p|^2 [1 + r^{2p}],$$

pour des fonctions $g \in H^2(G_r)$, $g(z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} g_p z^p$, $z \in G_r$, et la famille

$$e_p = \frac{z^p}{\sqrt{1 + r^{2p}}}, \quad z \in G_r, \quad p \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

est une base orthogonale de $H^2(G_r)$. Un problème extrémal borné (BEP) typique dans $H^2(G_r)$ est le suivant, depuis des données sur $K \subset \partial G_r$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Étant donnée } F \in L^2(K) \setminus H^2(G_r) \text{ et } M > 0, \\ \text{on cherche une fonction } g \in H^2(G_r) \text{ telle que } \|g\|_{L^2(J)} \leq M \text{ et} \\ \|F - g\|_{L^2(K)} = \inf \{ \|F - \psi\|_{L^2(K)} : \psi \in H^2(G_r), \|\psi\|_{L^2(J)} \leq M \}. \end{array} \right.$$

En se référant à [9], le problème (BEP) admet une unique solution s'obtient en résolvant une équation spectrale pour l'opérateur de Toeplitz $\mathcal{T}$ de symbole $\chi_{r\mathbb{T}}$, la fonction caractéristique de $r\mathbb{T}$:

$$\mathcal{T} : H^2(G_r) \rightarrow H^2(G_r)$$

$$g \mapsto P_{H^2(G_r)} \chi_{r\mathbb{T}} g,$$

et $P_{H^2(G_r)} : L^2(\partial G_r) \rightarrow H^2(G_r)$ est la projection orthogonale. On a alors

$$g = (I + l\mathcal{T})^{-1} P_{H^2(G_r)} F,$$

pour l'unique $l > -1$ tel que

$$\|g\|_{L^2(r\mathbb{T})} = M,$$

(si F n'est pas déjà la trace sur K d'une fonction de $H^2(G_r)$). Lorsque $K = \mathbb{T}$, on a la caractérisation suivante [6, 10] :

Théorème 1 Soit $F \in L^2(\mathbb{T}) \setminus H^2(G_r)$:

$$F(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta} \quad a. e. \quad \text{sur } \mathbb{T},$$

alors, la solution du problème (BEP) est donnée par :

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n}{1 + (1 + l)r^{2n}} z^n,$$

pour $z \in G_r$, où $l > -1$ est l'unique constante telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|a_n|^2 r^{2n}}{(1 + (1 + l)r^{2n})^2} = M^2.$$

Remarques

1) Avec $K = s\mathbb{T} \subset \partial G_s$, lorsqu'il s'agit d'étendre $F|_{s\mathbb{T}}$ sur la frontière $r\mathbb{T}$ de $G_s = r\mathbb{D} \setminus s\overline{\mathbb{D}}$, on résout un (BEP) dans l'espace de Hardy $H^2(G_s)$ dont la solution g est donnée par

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{s^{2n} a_n}{s^{2n} + (1+l)r^{2n}} z^n,$$

pour $z \in G_s$, avec $l > -1$ l'unique constante telle que $\|g\|_{L^2(r\mathbb{T})} = M$.

2) On trouvera dans [6, 10] des expressions similaires à celle du théorème 1 pour le calcul de g dans les situations où $K \subset \mathbb{T}$ (qui correspondent à $K_2 \subset \mathbb{T}$, $K_1 \subset s\mathbb{T}$).

3) Un résultat de continuité de la solution par rapport aux données est établi dans [10], ainsi que des résultats de stabilité globale logarithmique dans [11].

4) Dans la pratique, pour compléter des données en résolvant un (BEP), on doit faire un choix convenable du paramètre de régularisation (la contrainte) M . Dans [10], nous avons présenté une approche pour résoudre cette question et construit ainsi une famille d'algorithmes robuste permettant la reconstruction d'un approximant adéquat.

4. Identification de fissures et résultats numériques

Pour simplifier, on note (u_+, Φ_+) les données sur $K_1 \subset \mathbb{T}$ et par (u_-, Φ_-) celles sur $K_2 \subset s\mathbb{T}$. On suppose dans un premier temps que le rayon λ du cercle porteur de la (ou des) fissure(s) σ est connu. On peut alors diviser le domaine $G \setminus \sigma$ en deux couronnes : $G \setminus \lambda\mathbb{T} = G_1 \cup G_2$ avec $G_1 = \mathbb{D} \setminus \lambda\overline{\mathbb{D}}$ et $G_2 = \lambda\mathbb{D} \setminus s\overline{\mathbb{D}}$ (figure 1). La solution u de (PI)

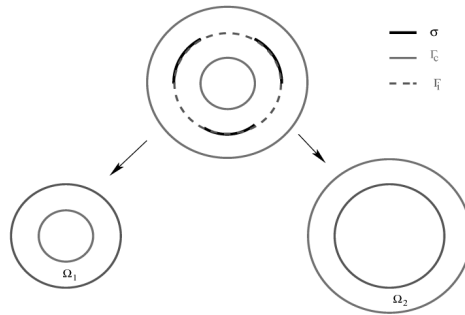
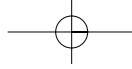


Figure 1. $G \setminus \lambda\mathbb{T} = G_1 \cup G_2$, $G_i = \Omega_i$.

est maintenant harmonique dans G_1 et G_2 , elle vérifie donc les deux systèmes suivants :

$$(P_+) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } G_1 \\ u = u_+ & \text{on } K_1 \subset \mathbb{T} \\ \partial_n u = \Phi_+ & \text{on } K_1 \end{cases} \quad (P_-) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } G_2 \\ u = u_- & \text{on } K_2 \subset s\mathbb{T} \\ \partial_n u = \Phi_- & \text{on } K_2 \end{cases}$$

avec des conditions aux bords sur $K_1 \subset \mathbb{T}$ et $K_2 \subset s\mathbb{T}$ respectivement. Les solutions des problèmes directs étant harmoniques dans G_1 et G_2 respectivement, il existe alors deux fonctions F_+ et F_- analytiques dans G_1 et G_2 respectivement, telles que $u = \operatorname{Re} F_+$ dans



G_1 et $u = \operatorname{Re} F_-$ dans G_2 . Celles-ci sont définies (à une constante imaginaire pure près) par

$$F_+ = u + iv_+ \quad \text{et} \quad F_- = u + iv_- ,$$

les fonctions v_+ et v_- étant, respectivement dans G_1 et G_2 , les conjuguées harmoniques de u (voir [1]). La relation entre u et $v_{\pm}$ à la frontière de G_1 et G_2 est donnée par les équations de Cauchy-Riemann, et en particulier :

$$\partial_n u = \partial_{\theta} v_{\pm} .$$

Au vu de la condition de flux nul (fissure isolante) sur σ , ceci détermine des fonctions harmoniques mono-valuées $v_{\pm}$ dans G_1, G_2 , à une constante près que l'on normalise en imposant la condition $v_{\pm} = 0$, en un point $e^{i\theta_1} \in K_1 \subset \mathbb{T}$ et $se^{i\theta_2} \in K_2 \subset s\mathbb{T}$. Par conséquent, pour tout $e^{i\theta} \in K_1$ et $se^{i\theta} \in K_2$:

$$v_+(e^{i\theta}) = \int_{e^{i\theta_1}}^{e^{i\theta}} \Phi_+(e^{it}) dt \quad \text{et} \quad v_-(se^{i\theta}) = \int_{se^{i\theta_2}}^{se^{i\theta}} \Phi_-(se^{it}) dt .$$

On résout alors deux problèmes extrémaux bornés pour les données F_+ et F_- dans les couronnes G_1 et G_2 , respectivement, relativement à $K_1 \subset \mathbb{T}$ et $K_2 \subset s\mathbb{T}$, avec des contraintes ajustées, et on calcule les traces des approximants g_+ et g_- associés sur le cercle $\lambda\mathbb{T}$. Cela fournit un moyen d'identifier complètement la (ou les) fissure(s) comme support de la discontinuité de la $u_{\pm} = \operatorname{Re} g_{\pm}$ au travers de $\lambda\mathbb{T}$. Soit $[u]$ la fonction représentant le saut de u à travers σ ; l'identification de σ est permise par le lemme suivant [2] :

Lemme 1 Si $\int_{\sigma} [u] ds \neq 0$ alors l'ensemble $\sigma = \overline{\{(\lambda, \theta) : [u](\lambda, \theta) \neq 0\}}$.

On obtient alors $[u] \simeq g_+ - g_-$ sur $\lambda\mathbb{T}$ et on localise σ comme le support de $[u]$, d'après le lemme 1. Bien entendu, nous utilisons numériquement l'approximation

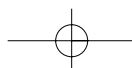
$$\sigma \sim \{(\lambda, \theta) : [u](\lambda, \theta) \geq \epsilon \sup_{\lambda\mathbb{T}} [u]\}$$

pour estimer σ où $\epsilon > 0$, qui représente un seuil au dessous duquel les faibles valeurs de $[u]$ sont considérées comme négligeables.

La figure 2 représente le saut $[u]$ calculé et la fissure reconstituée pour un choix $u_{\pm} = \operatorname{Re} F$ et un flux $\Phi_{\pm} = \partial_{\theta} \operatorname{Im} F$, pour la fonction $F(z) = 2 + z^2$, avec $s = 0.6$ et $\lambda = 0.75$.

Les problèmes extrémaux bornés sont résolus pour la donnée F sur $K_1 = \mathbb{T}$, $K_2 = s\mathbb{T}$ et pour une fissure σ égale à l'arc de cercle $(\lambda e^{3i\pi/4}, \lambda e^{i\pi})$.

Dans les cas plus réalistes où le cercle hôte $\lambda\mathbb{T}$ est inconnu, cette approche est utilisée pour déterminer le rayon λ . L'idée est d'introduire un cercle quelconque $r\mathbb{T}$ pour $s < r < 1$ et de construire les approximants harmoniques solutions des (BEP) dans les deux couronnes $G_r = \mathbb{D} \setminus r\overline{\mathbb{D}}$ et $G_s = r\mathbb{D} \setminus s\overline{\mathbb{D}}$, pour les données $F_{\pm}$ sur $K_1 \subset \mathbb{T}$ et $K_2 \subset s\mathbb{T}$, avec des valeurs des contraintes appropriées. On compare alors les erreurs d'approximation sur K_1 et sur K_2 , et l'on modifie la valeur de r jusqu'à ce qu'elles soient comparables et petites toutes les deux (voir section 2), ce qui a lieu lorsque $r \simeq \lambda$. Dans la figure 3 on représente la reconstruction du saut $[u]$ et de la fissure σ ainsi que du rayon λ du cercle hôte relativement à des données comme ci-dessus, bruitées de 1% à 10%.



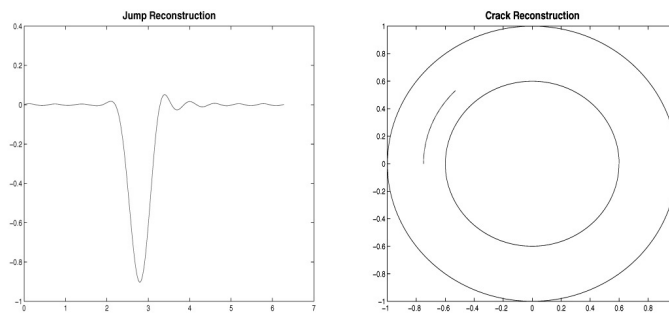


Figure 2. Reconstruction du saut $[u]$ (à gauche) et de la fissure (à droite).

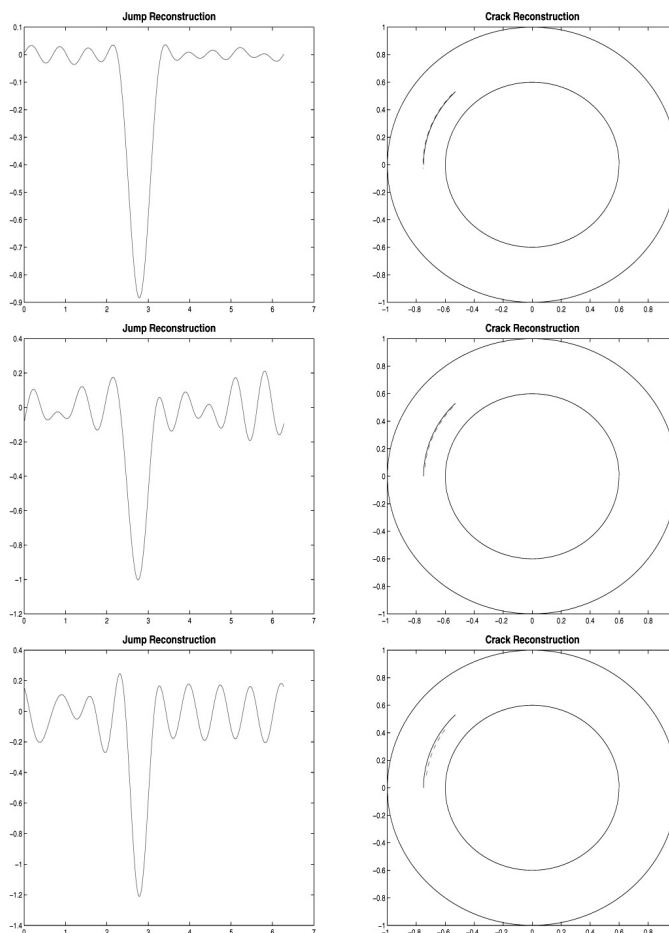


Figure 3. Reconstruction à partir de données bruitées : 1%, 5% et 10%.

Le tableau 4 suivant représente la sensibilité de la reconstruction de la fissure et de la détermination de λ aux effet du bruit ; les $\theta_{i,ap}$ y dénotent les approximations obtenues des arguments des extrémités de σ , à .

Bruit	λ_{ap}	$\theta_{1,ap}$	$\theta_{2,ap}$
1%	0.75	2.4	3.15
15%	0.74	2.4	3.09
10%	0.74	2.5	3.06
15%	0.76	2.3	3.19

5. Bibliographie

- [1] AHLFORS L. V., « Complex analysis », *McGraw-Hill, New York*, (1953).
- [2] ANDRIEUX S. AND BEN ABDA A., « Identification de fissures planes par une donnée au bord unique : un procédé direct de localisation d'identification », *C.R. Acad. Sci., Paris 315 série I* (1992).
- [3] BARATCHART L. AND LEBLOND J., « Hardy approximation to L^p functions on subsets of the circle avec $1 \leq p < \infty$ », *Constructive Approximation* **14** (1998), 41–56.
- [4] BARATCHART L., LEBLOND J. AND PARTINGTON J.R., « Problems of Adamjan-Arov-Krein type on subsets of the circle and minimal norm extensions », *Constructive Approximation* **16** (2000), 333–357.
- [5] BEN ABDA A., BEN AMEUR H. AND JAOUA M., « Identification of 2-D crack by elastic boundary measurements », *Inverse Problems* **15** (1999), 67–77.
- [6] BEN ABDA A., BEN HASSEN F., LEBLOND J. AND MAHJOUB M., « Sources recovery from boundary data : a model related to electroencephalography », *to appear in M3AS*.
- [7] BEN ABDA A., KALLEL M., LEBLOND J. AND MARMORAT J-P., « Line-segment cracks recovery from incomplete boundary data », *Inverse Problems* **18** (2002), 1057–1077.
- [8] BRYAN K. AND VOGELIUS M., « A review of selected works on crack identification », *IMA Volumes in Mathematics and its Applications* **137** (2004), 25–46.
- [9] CHALENDAR I. AND PARTINGTON J.R., « Approximation problems and representations of Hardy spaces in circular domains », *Studia Math.* **136** : 255–269, 1999.
- [10] JAOUA M., LEBLOND J., MAHJOUB M. AND PARTINGTON J. R., « Robust numerical algorithms based on analytic approximation for the solution of inverse problems in annular domains », *submitted*.
- [11] LEBLOND J., MAHJOUB M. AND PARTINGTON J. R., « Analytic extensions and Cauchy-type inverse problems on annular domains : stability results », *J. Inv. Ill-Posed Problems* **14**, 2 (2006) 189–204.