

Représentation d'images

Approximation d'une forme volumique par des boules

Ndéye Fatou NGOM* — Olivier Monga

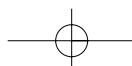
* Laboratoire Modélisation et Applications Thématiques UCAD/IRD
Département Mathématique et informatique
Université Cheikh Anta DIOP de Dakar
1386 Dakar FANN
SENEGAL
ndefangom@yahoo.fr/ngomnf@ird.sn

.....
RÉSUMÉ. Notre travail concerne la modélisation géométrique d'une forme volumique sans aucune information a priori. Nous proposons de représenter cette forme par un nombre minimal de boules incluses dans la forme et recouvrant son squelette. Nous décrivons un algorithme pour calculer cette représentation en utilisant la tétraédrisation de Delaunay. Nous appliquons cet algorithme à des données tomographiques tridimensionnelles du sol pour fournir une description géométrique de l'espace poral qui peut être utilisée pour la simulation de l'activité biologique du sol

ABSTRACT. We present a primary representation for complex 3D volume shape defined by a set of voxels which can be seen as an indicatrix function. We propose to describe a volume shape using a minimal number of balls included within the shape and recovering shape skeleton. We propose a heuristic algorithm based on Delaunay 3D triangulation to compute the minimal number of balls. We apply our algorithm to 3D volume Computed Tomography soil data in order to provide intrinsic and robust geometrical description of pore space to be used for biological dynamics simulation and modeling

MOTS-CLÉS : Forme volumique, approximation par morceaux, images tomographiques, squelette, boule maximale, sol

KEYWORDS : volume shape, piece wise shape approximation, Computed Tomography, skeleton, maximal ball, soil.



1. Introduction

Les capteurs actuels d'imagerie tomographique (Scanner, résonance magnétique nucléaire) permettent l'obtention d'images sous la forme d'un ensemble de points tridimensionnels (voxels) jusqu'à 5μ . Toutefois, modéliser la forme de l'objet de manière stable et intrinsèque à partir de cet ensemble de points est une tâche difficile. En effet, l'analyse d'images requiert un modèle c'est à dire une représentation formelle mathématique ou informatique qui sera un outil de base dans la généralisation d'approximations volumiques, la prédiction et l'interprétation des variations observées (Heuvelik et Webster, 2001). A travers le concept d'autosimilarité de formation, une série d'articles sur des modèles fractals de structures existe dans la littérature (Young et Crawford, 1991). Considérant une image comme une partie de la réalisation d'un processus aléatoire, des modèles statistiques morphologiques se sont aussi développés, (Archambaud et al, 1993). Parallèlement ont été aussi exposés des modèles (squelette, axe médian) topologiques (Blum, 1957; Attali et al, 2007). D'autres modèles sont fondés sur une union de boules (Danielson et Nilsson, 1997). Cependant ces derniers modèles ont des domaines de validités restreintes. La construction de modèles pouvant décrire la complexité d'un milieu poreux naturel reste donc toujours un problème ouvert. Dans cet article, nous proposons un modèle qui s'appuie sur le recouvrement minimal du squelette par des boules. Il donne une description compacte d'une forme volumique tout en préservant sa topologie et peut être utilisé pour représenter l'espace poral comme ensemble de pores distincts (Fatt, 1956). La section 2 donne quelques rappels. La section 3 décrit le modèle. La section 4 montre des résultats obtenus avec des données réels du sol et quelques formes simples.

2. Rappels et Notations

Soit E est un espace euclidien, L un sous ensemble de E , $B(M, r)$ la boule de centre M et de rayon r . On appelle boule maximale $B_L^m(M, r)$ de L , toute boule $B(M, r)$ incluse dans L mais qui n'est incluse dans aucune boule incluse dans L . On notera $B_L^m(M, r)$ une boule maximale de L centrée en M et de rayon r . Le squelette de L que nous noterons S_L est l'ensemble des centres des boules maximales de L (Attali, 1995).

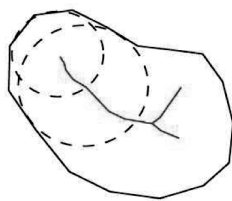


Figure 1 – Boules maximales et squelette

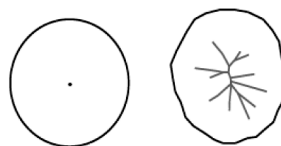


Figure 2 – Sensibilité du squelette au bruit (Cazal et Gissen, 2004)

Remarque 1 S_L fournit de précieux renseignements sur la topologie de L mais est très sensible au bruit. Une petite perturbation sur le contour de L conduit à l'apparition de nouvelles branches sur S_L . Des formes très voisines peuvent donc avoir des squelettes très différents. Dans la section suivante, un modèle de représentation basé sur le recouvrement du squelette est décrit.

Remarque 2 Notre étude est effectuée dans l'espace continu. Toutefois, on peut la transposer dans l'espace voxels avec les outils de la géométrie algorithmique (Attali et al, 2007) où les boules maximales sont en fait les boules de Delaunay.

3. Caractérisation géométrique d'une forme par des boules maximales

Soit E un espace affine tridimensionnel. Nous appelons image binaire tridimensionnelle de E toute fonction $u : E \rightarrow \{0, 1\}$. Soit $L \subset E$ définie par une fonction image $u : M(i, j, k) \in L \iff u(i, j, k) = 1$. Notre objectif est d'associer à toute forme géométrique une approximation par un ensemble de boules. Toutefois dans le cadre de la théorie de la mesure, on ne sait gérer les mesures ¹ de familles d'ensembles que lorsqu'ils sont disjoints. Dés lors, afin de simplifier et de fournir une théorie mathématique rigoureuse sur les erreurs d'approximation, il est préférable de ne considérer ou de n'identifier que les sous recouvrements disjoints de la forme donnée.

Théorème 1 Soient L un sous ensemble borné de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \{B(x_{\alpha}, r_{\alpha})_{\alpha \in A}\}$ la collection de toutes boules maximales de L , et S le squelette de la forme L . Alors, il existe une constante K , ne dépendant que de n , et des sous familles disjointes dénombrables $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_K$ de $\mathcal{B}$ qui recouvrent S .

Preuve 1 Par définition, le squelette de L représente l'ensemble des centres de ses boules maximales. Or comme L est borné alors toute boule maximale de L aura un rayon borné. Par suite $\mathcal{B} = \{B(x_{\alpha}, r_{\alpha})_{\alpha \in A}\}$ est une collection de boules de rayons bornés dont le squelette S_L est l'ensemble de leur centre. On peut donc appliquer le lemme de Besicovich (Villani, 2007). Ce qui démontre l'existence de sous familles disjointes dénombrables $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_K$ de $\mathcal{B}$, qui recouvrent S_L .

Définition 1 (p-chaîne) On appellera q – chaîne de L tout recouvrement du squelette de L par des boules maximales. On appellera p – chaîne de L tout recouvrement fini du squelette de L par des boules maximales.

Remarque 3 Toute p – chaîne est une q – chaîne mais la réciproque est fausse. Il vient aussi que dans un espace euclidien l'ensemble des q -chaînes constituées de boules maximales disjointes dénombrable est non vide d'après le théorème 1 et est dénombrable puisque l'espace euclidien est à base dénombrable.

Théorème 2 Soient X un sous ensemble de E et B_X^m une boule maximale de X ouverte. X est ouverte si et seulement si $X = \bigcup_{\mathcal{B}} B_X^m$, où $\mathcal{B}$ représente l'ensemble des boules maximales ouvertes de X .

Preuve 2 En effet toute boule maximale de X est incluse dans X . Par suite la réunion de toutes les boules maximales de X est elle aussi incluse dans X . Réciproquement soit x un point de X . Comme X est ouverte, alors x est inclus dans une boule B_X ouverte incluse dans X . Une boule maximale contenant x est soit B_X si elle n'est incluse dans aucune autre boule incluse dans X , soit la plus grosse boule incluse dans X contenant B_X .

1. volumes dans $\mathbb{R}^3$

Théorème 3 Soient X un sous ensemble ouvert de E et S le squelette de X . Si S est compact, alors X possède au moins une p – chaîne.

Preuve 3 L'ensemble des boules maximales est un recouvrement naturel du squelette puisque chaque point du squelette est centre d'une boule maximale. Comme le squelette est compact alors on peut en extraire d'après la propriété de Borel Lebesgue² un sous recouvrement fini qui par construction est inclus dans la forme et contient le squelette. Par suite, ce dernier recouvrement est une p -chaîne.

Définition 2 Soient E un espace euclidien et L un sous ensemble de E admettant au moins une p – chaîne. On appellera S – chaîne de L la p -chaîne de cardinal minimum par rapport au nombre de boules maximales.

Intuitivement en langage topologique, une S – chaîne d'une forme correspond à la p -chaîne la moins fine de la forme.

Remarque 4 Soit C l'ensemble des S – chaînes de L , le cardinal de C n'est pas forcément égal à 1. L'ensemble des S -chaînes d'une forme géométrique n'est pas toujours un singleton. Toutefois ces S -chaînes sont équivalentes d'un point de vue topologique (même type d'homotopie) : on peut passer d'une S -chaîne à une autre par une déformation continue.

Théorème 4 Soit S le squelette d'un compact L de $\mathbb{R}^n$ borné. Supposons que l'intersection de l'adhérence de S à la frontière de L est vide. Alors S est un sous ensemble fermé de L .

Preuve 4 Soit d la distance euclidienne sur L . Soit maintenant x la limite d'une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S . Soit r_m le rayon de la boule maximale de centre z_m . Puisque L est bornée et que par définition toute boule maximale de K est incluse dans L , la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors bornée par conséquent converge vers un réel r . Considérons maintenant la suite extraite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée à cette dernière suite de rayons strictement monotone. Il faut noter que la limite de la suite extraite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est toujours x . D'autre part pour tout élément x_n de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $r_n = d(x_n, \partial L) > 0$ et par continuité de la fonction distance $r = d(x, \partial L)$. En effet, supposons que r_n n'est pas le rayon de la boule maximale centrée en x_n . Alors tout autre réel qui serait rayon de la boule maximale de centre x_n serait strictement supérieur à r_n par conséquent posséderait des éléments qui appartiennent au complémentaire de L . Ce qui est absurde puisque cette boule est incluse dans L .

Montrons que r est strictement positif. Supposons que $r = 0$. Alors x appartient à ∂K . Comme x est limite d'une suite d'éléments de S alors x appartient aussi à l'adhérence de S . Absurde puisque l'intersection de l'adhérence de S à la frontière de L est vide d'où $r > 0$. Le fait que x appartient à l'intérieur de L entraîne l'existence d'une boule centrée en x et incluse dans L .

Montrons que la boule de centre x et de rayon r est une boule maximale de L . Comme x appartient à L et r représente la distance de x à la frontière de L alors la boule de centre x et de rayon r est incluse dans L (*). Puisque la frontière de L est fermée alors, il existe un x_f appartenant à frontière de L tel que l'intersection de la boule de centre x et de rayon r $B(x, r)$ avec la frontière de L contienne x_f . **Si cette intersection n'est pas**

2. De tout recouvrement d'ouverts d'un compact, on peut en extraire un sous recouvrement fini

réduite en un point, alors $B(x, r)$ rencontre la frontière de L en au moins deux points. Par suite x appartient à l'axe médian de L qui est lui-même inclus dans le squelette S . D'où x appartient à S . **Supposons maintenant que cette intersection est réduite en point** x_f . Supposons qu'il existe une boule de L qui le contient. Alors l'intersection de cette boule avec la frontière de L contiendra forcément x_f . Soient y le centre de cette boule et a le rayon de cette boule alors si y est un des éléments de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alors on a : $a = r$ ce qui implique que $x = y$. Si y n'est pas un élément de cette suite, alors : $\forall x_n \in (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(y, x)$. Par passage au limite, on a lors que n tend vers l'infini $d(x_n, x)$ tend vers zéro. Par suite : $d(x_n, y) \leq d(y, x) = a - r$. Supposons que r est la borne sup des éléments de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors pour tout élément r_m de cette suite : $a - r \leq a - r_m$. Soit r_n le rayon de la boule maximale $B(x_n, r_n)$ centrée en x_n alors : $d(x_n, y) \leq a - r \leq a - r_m$.

Cette dernière inégalité traduit le fait que la boule $B(x_n, r_n)$ est incluse dans la boule $B(x, r)$. Ce qui est absurde puisque $B(x_n, r_n)$ est une boule maximale. Nous pouvons ainsi affirmer que la boule $B(x, r)$ de centre x et de rayon r n'est contenue dans aucune autre boule de $L^{(*)}$. D'après $(*)$ et $(**)$ nous pouvons donc conclure que $B(x, r)$ est une boule maximale. Par conséquent x appartient à S . D'où le squelette S de L est fermé.

Corollaire 1 Sous les hypothèses du théorème 4, le squelette de K est compact.

En effet le squelette est borné puisqu'il est inclus dans K qui est borné. Or sous les hypothèses théorème 4, le squelette est fermé. Par conséquent, d'après la seconde propriété de Weierstrass³ le squelette est compact.

4. Algorithmes de calcul

4.1. Algorithme de calcul d'une S-chaine avec des données réelles du sol

Les données que nous utilisons dans cette section sont des échantillons d'images 3D de sol de taille $700 \times 700 \times 700$. En utilisant un seuil adapté, on extrait les pores qui forment 10% à 50% du volume total. Ensuite, on calcule l'enveloppe de l'espace poral qui forme approximativement 1% du volume total (3 430 000 voxels). Et après la tétraédrisation de Delaunay de l'enveloppe de l'espace poral est calculée à l'aide du code Telmesh-GHS3D (George, 2004). Parmi les tétraèdres, on sélectionne ceux qui sont inclus dans la forme. Puis, on calcule les centres et les rayons des sphères passant par les quatre sommets des tétraèdres. L'ensemble des centres des sphères représente l'approximation cherchée du squelette. Il peut être calculé avec l'algorithme exposé dans (Monga et al, 2007). Ayant tous les points du squelette, l'algorithme ci dessous donne un résultat acceptable du recouvrement minimal.

Algorithme 1 (Approximation) 1-Retenir toutes les boules de Delaunay dans une liste que nous appelons S .

2-Trier les boules de S dans un ordre décroissant en fonction de leurs rayons.

3-faire tendre t vers zéro où t est un seuil définissant la valeur maximale du volume de l'intersection de deux boules.

4-Sortir de S la tête de liste c'est à dire la boule de rayon maximum M .

3. Un fermé borné d'un compact est compact

5-Calculer l'intersection de M avec toutes les boules de S . Soit l la valeur maximale du volume de l'intersection de M avec les boules de S .

6-Si l est inférieur ou égal à t , mettre M dans la liste finale des boules de S .

7-Si la liste S n'est pas vide, aller à 4.

8-Si l'union des boules contient tous les points du squelette, alors arrêter le processus.

9- Sinon, poser $t=t+l$.

10-Aller à 4.

Si n est le nombre de boules de Delaunay, le coût algorithmique est en $O(n^2)$. La liste finale contiendra un nombre minimal de boules maximales dont la réunion contient le squelette. L'algorithme que nous venons de décrire calcule une approximation acceptable de la forme car la liste finale contient au moins 90% des points du squelette.



Figure 3 – Echantillon de sol

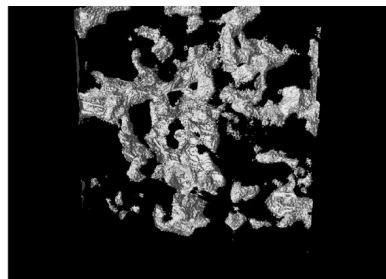


Figure 4 – Vue 3D de l'espace poral

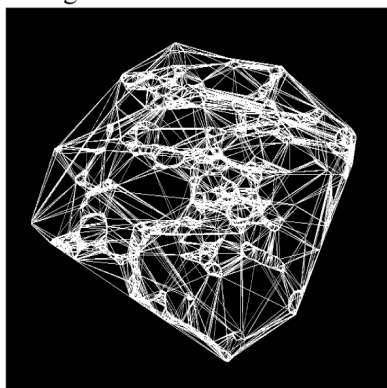


Figure 5 – Triangulation de Delaunay des points de la surface de l'espace poral



Figure 6 – Résultat algorithme :
rayon ≥ 3 : 2090 boules

4.2. Approximation quelques formes simples

Dans cette section nous allons montrer comment obtenir une S-chaine d'un polygone régulier grâce aux propriétés des triangles isocèles.

4.2.1. Recouvrement minimal du squelette d'un triangle isocèle

Soient (A, B, C) un triangle isocèle en A , a, b, c les longueurs de ses côtés respectifs, S la surface du triangle, h la hauteur relative au côté (BC) de longueur a , r le rayon du

cercle inscrit au triangle et α l'angle en A . La bissectrice de A est la droite passant par A et le milieu du côté opposé que nous notons I et par suite le cercle $C(O, r)$ inscrit à ce triangle aura pour rayon $d(O, I)$. Soit I_1 la symétrique de I par rapport à O . Par construction la tangente (D_1) à $C(O, r)$ en I_1 est perpendiculaire à la bissectrice. Soit B_1, C_1 les points d'intersections respectifs de $(AB), (AC)$ avec D_1 . Le triangle (A, B_1, C_1) est aussi isocèle en A . En effet : $\widehat{AI_1C_1} = \widehat{AI_1B_1} = \frac{\pi}{2}$; $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{AB_1C_1} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}$. Soit $C(O_1, r_1)$ le cercle inscrit au triangle (A, B_1, C_1) alors $r_1 = d(O_1 I_1)$. Par conséquent $C(O, r) \cap C(O_1, r_1) = I_1$. Maintenant considérons la suite $(AB_n C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des triangles isocèles en A , dont la longueur de la hauteur issue de A est h_n , les longueurs des côtés des triangles $a_n, b_n = c_n$, avec comme boule inscrite $C_n(O_n, r_n)$ et dont I_n est la symétrique de I_{n-1} par rapport à O_{n-1} . Posons $a_0 = a, b_0 = b, r = r_0, (ABC) = (AB_0 C_0), p = \frac{a+b+c}{2}$ alors : $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}, h = h_0; h_1 = h - 2r, h_2 = h - 2(r + r_1), \dots, h_n = h - 2 \sum_{i=0}^{n-1} r_i$. Comme (D) est perpendiculaire à $(B_1 C_1)$ en (I_1) et à (BC) en I , alors $(B_1 C_1)$ et (BC) sont parallèles d'où $a_i = \frac{ah_i}{h}; b_i = c_i = \frac{bh_i}{h}$.

Le squelette du triangle isocèle est sa hauteur issue de A . Une S-chaine du triangle peut être obtenu en minimisant : $h_n - h = 2 \sum_{i=0}^{n-1} r_i$. Voici un exemple d'algorithme permettant de connaître le nombre de boules recouvrant le squelette du triangle avec une erreur ϵ acceptable :

Algorithme 2 1) Entrer les valeurs respectif a, b de la base du triangle et de l'apothème du triangle

2) Calculer $p = \frac{1}{2}(a + 2b); r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)^2}{p}}$

3) Si $2r > \epsilon$

Calculer

$h_1 = h - 2r$

$a_1 = \frac{ah_1}{h}; b_1 = \frac{bh_1}{h}; p_1 = \frac{1}{2}(a_1 + 2b_1); r_1 = \sqrt{\frac{(p_1-a_1)(p_1-b_1)^2}{p_1}}$

Tant que $2 \sum_{i=0}^{n-1} r_i > \epsilon$

Calculer h_n, a_n, b_n, p_n, r_n

A la fin de l'algorithme, afficher n .

4.2.2. Recouvrement minimal du squelette d'un polygone régulier

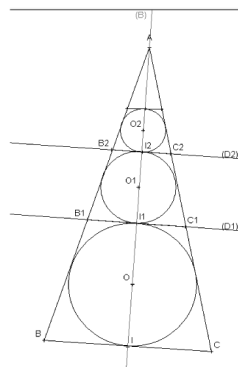


Figure 7 – S-chaine d'un triangle isocèle

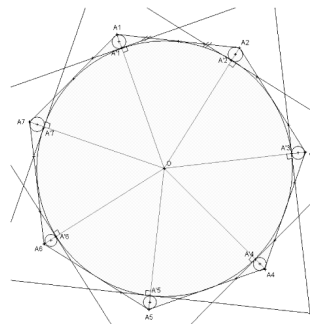


Figure 8 – S-chaine d'un polygone régulier

Soit $A_i; i = 1...n, n > 4$ et O les sommets et le barycentre d'un polygone régulier. Soit A'_i l'intersection du cercle de centre O et de rayon $d(OA_i)$ avec la bissectrice de $\hat{A}_i$. Ce point est aussi le centre du cercle inscrit au triangle $(I_1 A_1 I_2)$ où I_1 et I_2 sont les milieux respectifs des côtés adjacents à $\hat{A}_i$. Le squelette du polygone est alors : $S = \bigcup_{i=1}^{i=n} [A_i, A'_i] \cup \{O\}$. Les segments $[A_i, A'_i]$ sont recouverts avec la même méthodologie qui avait été décrite pour les triangles isocèles. Si n_{A_i} est le nombre de boules trouvé pour recouvrir un segment $[A_i, A'_i]$ alors le nombre de boules maximales cherché est : $m = 1 + \sum_{i=1}^{i=n} n_{A_i}$

5. Conclusion

Nous avons posé les bases d'un modèle de représentation. Ce modèle est une caractérisation géométrique en termes de boules qui conserve les propriétés topologiques de la forme. Nous avons montré l'existence d'une telle approximation pour des formes particulières et nous avons calculé ce modèle pour des données réels du sol. Des travaux futurs viseront à améliorer cette représentation en regroupant les boules pour obtenir une approximation par des cylindres généralisés.

6. Bibliographie

- [1] S. ARCHAMBAULT, M. MOORE, « Statistique morphologiques pour l'ajustement d'images, revue internationale de statistique », *revue internationale de statistique*, vol. 61, n° 2, 1995.
- [2] D. ATTALI, « Squelettes et graphes de Voronoï 2D et 3 », *Thèse, Université Joseph Fourier - Grenoble 1*, 1995.
- [3] D. ATTALI, J.-D BOISSONNAT, H. EDELSBRUNNER, « Stability and computation of the medial axis, a state-of-the-art Report », *Moller T., Hamann B., Russel B., Eds., Mathematical foundations of scientific visualization, Computer Graphics and massive data exploration, Springer-Verlag*, 2007
- [4] H. BLUM, « A transformation for extracting new descriptor of shape », *Models for Perception of Speech and visual Form*, 1957
- [5] F. CAZAL, J. GISSEN, « Delaunay triangulation based surface reconstruction ideas and algorithms », *INRIA ; thème SYM. Système Symbolique . Projet Géométrica*, n° 5393, 2004.
- [6] J-W. CRAWFORD, I-M YOUNG, « The fractal structure of soil aggregates : its measurements and interpretation », *Journal of Soil Science*, n° 42, 1991.
- [7] P-E. DANIELSSON, F. NILSSON, « Finding the minimal set of maximum disks for binary objects », *Graphical models and image processing*, vol. 59, n° 1, 1997.
- [8] J-F. DELERUE, O. MONGA, N-F. NGOM, « Representing geometric structures in 3D tomography soil image : application to pore space modeling », *Computers and Géosciences*, n° 33, 2007.
- [9] I. FATT, « The network model of porous media », *Transaction Aim*, vol. 207, n° 1, 1956.
- [10] P-L. GEORGE, « Tetmesh-GHS3D, Tetrahedral Mesh Generator », *INRIA User's manual*, 78153, le Chesnay Cedex, 2004.
- [11] G.B.M HEUVELINK, R. WEBSTER, « Modeling soil variation : past, present and future », *Geoderma*, n° 100, 2001.
- [12] C. VILLANI, « Cours d'intégration et analyse de Fourier, mars 2007, Ecole Normale Supérieure », *Ecole Normale Supérieure (ENS) Lyon*, 2007.