

## Modélisation de la résonance d'une onde acoustique dans un tore

Jérôme Adou, Adama Coulibaly, Narcisse Dakouri

UFR de Mathématiques et Informatique Université de Cocody  
22 BP 582 Abidjan 22  
Côte d'Ivoire  
jkadou@hotmail.com, couliba@yahoo.fr, dakurnar6@yahoo.fr



**RÉSUMÉ.** Le pneumatique animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire constante  $\Omega$  est assimilé à un tore dont le cercle générateur est de rayon  $R$ . Le contact pneumatique/chaussée est schématisé par une ellipse de demi grand axe  $a$ . Lorsque  $(\Omega R/C_0) \ll 1$  et  $(a/R) \ll 1$  ( $C_0$  étant la vitesse du son), on montre qu'à l'échelle de temps rapide  $R/C_0$ , le mouvement de l'air dans le pneumatique excité périodiquement en surface engendre une onde acoustique  $h$ . L'étude montre que le mode  $p = 0$  est résonant et l'onde  $h$  à la résonance évolue de façon quadratique en temps. On montre également que cette variation de l'onde acoustique, à l'infini est d'autant plus rapide que la pression moyenne dans la chambre est basse.

**ABSTRACT.** We assimilate the rotating pneumatic tyre with constant angular velocity  $\Omega$  as a torus whose generating circle radius is  $R$ . The contact tyre/road is schematized as an ellipse with semimajor axis  $a$ . When  $(\Omega R/C_0) \ll 1$  and  $(a/R) \ll 1$  (where  $C_0$  is the velocity of sound), we show that at the rapid time scale  $R/C_0$ , the air motion within a torus periodically excited on its surface generates a acoustic wave  $h$ . The study shows that the acoustic mode associated to  $p = 0$  leads to resonance and the acoustic wave  $h$  in resonance moves quadratically in time. We also show that this variation of  $h$  is asymptotically more rapid when the mean pressure in the domain is lower.

**MOTS-CLÉS :** modélisation; numérique; ondes acoustiques; air; tore; résonance; pneumatique

**KEYWORDS :** modelling; numerical; acoustic waves; air; torus; resonance; pneumatic



## 1. Introduction

Nous étudions l'écoulement de l'air dans le pneumatique que nous modélisons comme étant un tore  $\mathcal{T}$  dont le cercle générateur est de rayon  $R$  tandis que le cercle de section est de diamètre  $d$ . Au contact du pneumatique avec le sol, il se crée une déformation que nous modélisons par une ellipse  $\mathcal{A}^*$  d'axes  $2a$  et  $2b$  avec  $a > b$ . Relativement au repère  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{z})$  lié à la roue, le mouvement de l'air, généré dans le pneumatique par la déformation  $\mathcal{A}^*$  se déplace le long de la surface du tore avec une vitesse angulaire  $(-\Omega)$ , de façon  $\frac{2\pi}{\Omega}$ -périodique autour de l'axe  $\vec{z}$ .

## 2. Equations

Nous supposons que l'air à l'intérieur de  $\mathcal{T}$  est un gaz parfait à entropie constante et nous négligeons les effets de dissipation. Nous notons  $\nu = (\vec{Y}, \vec{HC})$  où  $C$  est le centre de la roue et  $H$  le pied de la perpendiculaire abaissée de  $C$  sur le plan tangent contenant  $\mathcal{A}^*$ . Les équations du mouvement de l'air dans le repère entraîné sont

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 & ; \quad \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \rho \Omega^2 \vec{x} + 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{0} \quad \text{dans } \mathcal{T} \\ \vec{u} \cdot \vec{N} = (\Omega + \dot{\nu}) \rho \sin\left(\theta + \nu + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{d\xi}{dt} \quad \text{sur } \partial\mathcal{T}, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\vec{x}$  représente le vecteur radial,  $p$  la pression,  $\vec{N}$  la normale extérieure à la surface de  $\mathcal{T}$ ,  $(\rho, \theta)$  les coordonnées polaires tandis que  $\rho \Omega^2 \vec{x}$  et  $2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$  sont respectivement les forces d'inertie et de Coriolis. Le terme  $\frac{d\xi}{dt}$  résulte de la dynamique de l'ensemble roue-carrosserie représenté par un modèle schématique unidimensionnel. Nous notons  $h$  l'enthalpie et  $C_0$  la vitesse du son. Nous avons au repos

$$\vec{u} = \vec{0} \quad ; \quad h = h_0(\vec{x}) \quad \text{avec} \quad h_0(\vec{x}) + \frac{\Omega^2 x^2}{2} = \text{constante}. \quad (2)$$

Avec l'adimensionnalisation suivante

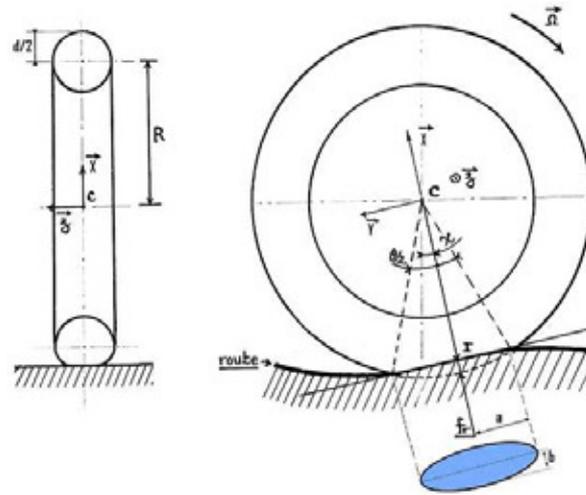
$$\vec{u} = \Omega a \vec{u}, \quad h = h_0(\vec{x}) + \Omega^2 R a \tilde{h}, \quad t = \frac{R}{C_0} \tau, \quad \vec{x} = R \vec{x}, \quad dS = \pi a b dS_*, \quad (3)$$

les équations (1) deviennent

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + M_{tr} \left[ 1 + (\gamma - 1) \delta M_{tr}^2 \tilde{h} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} + M_{tr} (\delta(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \tilde{h} - \vec{u} \cdot \vec{x}) \right] = 0 \quad \text{dans } \mathcal{T} \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + M_{tr} \left[ \vec{\nabla} \tilde{h} + 2\vec{z} \wedge \vec{u} + \delta(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = \vec{0} \quad \text{dans } \mathcal{T} \\ \vec{u} \cdot \vec{N} = \left[ \theta + \frac{\pi}{2} + \tau M_{tr} - \delta M_{tr}^2 \tilde{F}'(-\tau) \right] \left[ 1 + \delta M_{tr} \tilde{F}''(\cdot) \right] \frac{\chi_{\mathcal{A}^*}}{\delta} - \frac{d\tilde{\xi}}{d\tau} \frac{\delta \chi_{\mathcal{A}^*}}{2M_{tr}} \quad \text{sur } \partial\mathcal{T} \end{cases} \quad (4)$$

avec  $\delta = a/R$ ,  $M_{tr} = (\Omega R/C_0)$  le nombre de Mach de translation du fluide dans  $\mathcal{T}$  et  $\chi_{\mathcal{A}^*}$  la fonction caractéristique de  $\mathcal{A}^*$ . La fonction  $\tilde{F}$  définissant le profil de la route, nous avons

$$\frac{d\tilde{\xi}}{d\tau} = -\frac{2M_{tr}^3}{\delta} \tilde{F}'(-\tau) - 2M_{tr}^2 \frac{\alpha_2}{\delta} \tilde{N}^{-1} \int_0^\tau \tilde{\xi}(\tau') d\tau' \quad (5)$$



**Figure 1.** Illustration schématique du modèle

où  $\alpha_2/\delta$  est un paramètre  $o(1)$  tandis que

$$\tilde{N}(\tilde{Z}(\tau)) = \tilde{Z}(\tau) + \frac{M\omega}{m\Omega} M_{tr} \int_0^\infty \tilde{Z}(\tau - \tau_1) \sin\left(\frac{\omega}{\Omega} M_{tr} \tau_1\right) d\tau_1 \quad \forall \tau. \quad (6)$$

Un travail antérieur [1] a montré que l'écoulement de l'air dans  $\mathcal{T}$  est à faible nombre de Mach. Soit  $M_{tr} \ll 1$ . Nous supposons que la carrosserie et la roue respectivement de masses  $M$  et  $m$  sont liées par un ressort de raideur  $k$  animé d'un mouvement vertical suivant  $\vec{Y}$  de sorte que  $\omega = \sqrt{k/M}$ . La mise en mouvement du fluide étant impulsive, nous prenons à l'instant initial

$$(\vec{u}; \tilde{h}) = (\vec{0}; 0). \quad (7)$$

### 3. Mise en évidence du mode associé à $p = 0$

Nous étudions le problème (4)-(7), en utilisant le développement asymptotique avec  $M_{tr}$  comme petit paramètre de perturbation

$$(\vec{u}, \tilde{h}) = (\vec{u}_0, \tilde{h}_0) + M_{tr}(\vec{u}_1, \tilde{h}_1) + M_{tr}^2(\vec{u}_2, \tilde{h}_2) + \dots \quad (8)$$

A l'ordre principal du développement (8), le système (4)-(7) s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0 \text{ et } \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial \tau} = \vec{0} \text{ dans } \mathcal{T}; \quad \vec{u}_0 \cdot \vec{N} = \frac{1}{\delta} \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \chi_{A^*}. \quad (9)$$

A l'ordre un du développement (8), si nous posons

$$\tilde{h}_0(\tau, \vec{x}) = \tilde{h}_0^{(1)}(\tau, \vec{x}) + \tilde{h}_0^{(2)}(\vec{x}) \quad (10)$$

où  $\tilde{h}_0^{(2)}$  est une fonction donnée, solution d'un problème elliptique provenant du développement. Alors la fonction  $\tilde{h}_0^{(1)}$  vérifie les équations adimensionnelles d'ondes acoustiques

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{h}_0^{(1)}}{\partial \tau^2} - \tilde{\Delta} \tilde{h}_0^{(1)} = 0 \text{ dans } \mathcal{T}; & \vec{\nabla} \tilde{h}_0^{(1)} \cdot \vec{N} = \left[ \frac{-1}{\delta} + \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \frac{d^3 \tilde{F}}{d\tau^3} - \frac{B \tilde{N}^{-1} \tilde{\xi}(\tau)}{\delta} \right] \chi_{A^*} \\ \tilde{h}_0^{(1)}(0; \vec{x}) = -\tilde{h}_0^{(2)}(\vec{x}). \end{cases} \quad (11)$$

Afin d'étudier (11), nous simplifions en remplaçant dans la suite  $\tilde{h}_0^{(1)}(\tau, \vec{x})$  par  $h(\tau, \vec{x})$ . En supposant les sinuosités de la route régulières et caractérisées par la fréquence  $\mu$ , nous effectuons la transformation de Laplace

$$\left( \hat{h}(p, \cdot); \hat{\psi}(p) + \frac{e^{(-p+i\mu)T_1}}{p-i\mu} \right) = \int_0^\infty \left( h(\tau, \cdot); \tilde{F}(-\tau) \right) e^{-\tau p} d\tau \quad (12)$$

avec  $\left( h(\tau, \cdot); \tilde{F}(-\tau) \right) \rightarrow \left( -\tilde{h}_0^{(2)}(\cdot); 0 \right)$ , lorsque  $\tau \rightarrow 0$ . Le problème de l'acoustique (11) devient

$$\begin{cases} p^2 \hat{h} - \Delta \hat{h} = -p \tilde{h}_0^{(2)} \text{ dans } \mathcal{T} \\ \vec{\nabla} \hat{h} \cdot \vec{N} = \left[ \hat{X}(p) - p^3 \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \left( \hat{\psi}(p) + \frac{e^{(-p+i\mu)T_1}}{p-i\mu} \right) \right] \chi_{\mathcal{A}^*} \text{ sur } \partial \mathcal{T} \end{cases} \quad (13)$$

où  $T_1 > 0$ .  $\hat{\psi}(p)$  est une fonction holomorphe dans  $Re(p) > 0$  et

$$\hat{X}(p) = -\frac{1}{\delta p} + \frac{2\eta B p^2 \left( p^2 + \frac{m}{m+M} \omega_\epsilon^2 \right)}{p^4 + (2B \frac{\lambda^2}{a^2} + \omega_\epsilon^2) p^2 + 2B \frac{\lambda^2}{a^2} \frac{m}{M+m} \omega_\epsilon^2} \left( \frac{\hat{\psi}(p)}{\delta^3} + \frac{e^{(-p+i\mu)T_1}}{\delta^3(p-i\mu)} \right) \quad (14)$$

avec  $\omega_\epsilon = \frac{R}{C_0} \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}}$ . Afin de rechercher les pôles susceptibles de conduire à la résonance, nous écrivons  $\hat{h}$  sous la forme

$$\hat{h}(p, \cdot) = \hat{h}_1(p, \cdot) + \hat{X}(p) \hat{H}(p, \cdot) \quad (15)$$

où la fonction  $\hat{H}(p, \cdot)$ , analytique en  $p$  est l'unique solution de

$$p^2 \hat{H} - \Delta \hat{H} = 0 \text{ dans } \mathcal{T} ; \vec{\nabla} \hat{H} \cdot \vec{N} = \chi_{\mathcal{A}^*}(\cdot) \text{ sur } \partial \mathcal{T}. \quad (16)$$

Elle admet des pôles en

$$p = 0 \text{ si } \text{mes}(\mathcal{A}^*) \neq 0, \text{ et } p = \pm i\omega_n \quad (17)$$

les  $\omega_n$  étant les fréquences propres de vibration acoustique de  $\mathcal{T}$ .

Dans (15), La fonction  $\hat{h}_1(p, \cdot)$ , analytique en  $p$  vérifie le système

$$p^2 \hat{h}_1 - \Delta \hat{h}_1 = -p \tilde{h}_0^{(2)} \text{ dans } \mathcal{T} ; \vec{\nabla} \hat{h}_1 \cdot \vec{N} = -p^3 \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \left( \hat{\psi}(p) + \frac{e^{(-p+i\mu)T_1}}{p-i\mu} \right) \chi_{\mathcal{A}^*}, \quad (18)$$

avec des pôles en  $p = i\mu$  et  $p = \pm i\omega_n$ . En effectuant la transformation inverse de (12), la solution du problème de l'acoustique (11) s'écrit

$$h(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\wedge} \hat{h}(p, \vec{x}) e^{p\tau} dp \quad (19)$$

où,  $\wedge$  est une droite parallèle à l'axe des imaginaires et tracée dans  $Re(p) > 0$ .

Tenant compte de (15), nous notons que l'onde acoustique  $h(\tau, \cdot)$  entre en résonance lorsqu'un pôle d'excitation issu  $\hat{X}(p)$  coïncide avec l'un des modes propres provenant des pôles de  $\hat{H}(p, \cdot)$ . Or en scrutant (14) et (17), nous remarquons que  $p = 0$  est à la fois pôle de  $\hat{X}(p)$  et de  $\hat{H}(p, \cdot)$ . Par conséquent, le mode  $p = 0$  est résonant.

#### 4. Etude numérique de la résonance acoustique en $p = 0$

**Théorème 4.1.** La fonction  $\widehat{H}(p, \vec{x})$  définie en (16) au voisinage de  $p = 0$  vérifie la relation :

$$\widehat{H}(p, \cdot) = \frac{\text{mes}(\mathcal{A}^*)}{\text{mes}(\mathcal{T})} \frac{1}{p^2} + \widehat{H}_0(\cdot) + o(p) \quad (20)$$

où,  $o(p) \rightarrow 0$  lorsque  $p \rightarrow 0$ , et  $\widehat{H}_0(\vec{x})$  vérifie :

$$\Delta \widehat{H}_0 = \frac{\text{mes}(\mathcal{A}^*)}{\text{mes}(\mathcal{T})} \quad \text{dans } \mathcal{T} \quad ; \quad \vec{N} \cdot \vec{\nabla} \widehat{H}_0 = \chi_{\mathcal{A}^*}(\cdot) \quad \text{sur } \partial \mathcal{T}. \quad (21)$$

**Preuve.** Sans restreindre la généralité, considérons le développement suivant

$$\widehat{H}(p, \cdot) = \frac{\widehat{H}_{-2}(\cdot)}{p^2} + \frac{\widehat{H}_{-1}(\cdot)}{p} + \widehat{H}_0(\cdot) + o(p). \quad (22)$$

En substituant (22) dans (16), nous montrons que  $\widehat{H}_{-2}$  et  $\widehat{H}_{-1}$  sont des constantes. Tenant compte de la relation de compatibilité associée, nous établissons que

$$\widehat{H}_{-2} = \frac{\text{mes}(\mathcal{A}^*)}{\text{mes}(\mathcal{T})} \quad \text{et} \quad \widehat{H}_{-1} = 0. \quad (23)$$

Et par suite,  $\widehat{H}_0$  vérifie

$$\Delta \widehat{H}_0 = \widehat{H}_{-2} \quad \text{dans } \mathcal{T} \quad ; \quad \vec{N} \cdot \vec{\nabla} \widehat{H}_0 = \chi_{\mathcal{A}^*}(\cdot) \quad \text{sur } \partial \mathcal{T}. \quad \square \quad (24)$$

Si nous appliquons le théorème des résidus à (19), en  $p = 0$ . Nous obtenons compte tenu de (14) et (20)

$$h(\tau, \vec{x}) = -\frac{\text{mes}(\mathcal{A}^*)}{2\delta \text{mes}(\mathcal{T})} \tau^2 - \frac{\widehat{H}_0(\vec{x})}{\delta}. \quad (25)$$

Afin d'interpréter le phénomène de la résonance, nous recherchons  $\widehat{H}_0$  en résolvant numériquement (21) en  $2D$ . dans le repère cylindrique  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{z})$ , nous avons pour tout point  $M \in \mathcal{T}$

$$\vec{CM} = (R + \rho \cos \varphi) \vec{e}_\rho + \rho \sin \varphi \vec{z}. \quad (26)$$

Partant de (26), nous générons le repère local direct  $(\vec{E}_\rho, \vec{E}_\theta, \vec{E}_\varphi)$  en posant

$$\vec{E}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_\rho + \sin \varphi \vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{E}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{z}, \quad (27)$$

$\vec{E}_\theta$  étant un vecteur unitaire normal au plan  $(\vec{E}_\rho, \vec{E}_\varphi)$ . Dans le repère local, nous fixons  $\theta$  en considérant la section droite de  $\mathcal{T}$  passant par sa partie en contact avec le sol. Le laplacien s'écrit donc en  $2D$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \varphi}{R + \rho \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho(R + \rho \cos \varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (28)$$

tandis que le gradient est

$$\nabla = \vec{E}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{E}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (29)$$

Dans une note antérieure [3], il a été établi que

$$P_0mes(\mathcal{A}^*) = \frac{(M+m)g}{\pi ab}. \quad (30)$$

Tenant compte de cette hypothèse, si nous posons

$$r = \left(\frac{d}{2}\right)^{-1} \varrho, \quad \nabla = \left(\frac{d}{2}\right)^{-1} \widehat{\nabla}, \quad dv = \frac{Rd^2}{4} dv^*, \quad (31)$$

le problème elliptique (21) s'écrit en coordonnées polaires  $(r, \varphi)$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \widehat{H}_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{H}_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \widehat{H}_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon r \cos \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial \widehat{H}_0}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \widehat{H}_0}{\partial \varphi} \right) = \frac{(M+m)g}{2\pi^3 ab P_0} \\ \text{pour } 0 < r < 1 \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \frac{\partial \widehat{H}_0}{\partial r} \Big|_{r=1} = 1 \quad \text{si } -\frac{2b}{d} \leq \varphi \leq \frac{2b}{d} \quad \text{et } \frac{\partial \widehat{H}_0}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0 \quad \text{sinon,} \end{cases} \quad (32)$$

où  $\varepsilon = \frac{d}{2R}$  et vérifie  $\varepsilon \ll 1$ , en raison de l'hypothèse de faible déformation. Nous réalisons un maillage de la section droite de  $\mathcal{T}$  en posant, pour  $i, j \in \mathbf{N}$

$$r_i = (i-1)l_r \quad \text{et} \quad \varphi_j = (j-1)l_\varphi \quad , \quad 0 \leq r < 1 \quad , \quad 0 < \varphi_j \leq 2\pi. \quad (33)$$

où  $l_r$  et  $l_\varphi$  désignent respectivement le pas radial et le pas angulaire. Notons

$\widehat{H}_0(r_i, \varphi_j) = H_{ij}$  et  $M_{ij} \equiv M(r_i, \varphi_j)$  tel que  $0 < r_i < 1$ . En utilisant les différences finies centrées pour les dérivées secondes à savoir

$$\frac{\partial^2 \widehat{H}_0}{\partial r^2} = \frac{H_{i-1j} - 2H_{ij} + H_{i+1j}}{l_r^2} + o(l_r^2) \quad ; \quad \frac{\partial^2 \widehat{H}_0}{\partial \varphi^2} = \frac{H_{ij-1} - 2H_{ij} + H_{ij+1}}{l_\varphi^2} + o(l_\varphi^2) \quad (34)$$

et pour les dérivées premières,

$$\frac{\partial \widehat{H}_0}{\partial r} = \frac{H_{i+1j} - H_{i-1j}}{2l_r} + o(l_r^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \widehat{H}_0}{\partial \varphi} = \frac{H_{ij+1} - H_{ij-1}}{2l_\varphi} + o(l_\varphi^2). \quad (35)$$

nous obtenons pour l'équation dans le domaine  $\mathcal{T}$  du système (32) le schéma suivant

$$\alpha_{i-1j} H_{i-1j} + b_i H_{ij} + \gamma_{i+1j} H_{i+1j} + \sigma_{ij-1} H_{ij-1} + \xi_{ij+1} H_{ij+1} = \frac{(M+m)g}{2\pi^3 ab P_0}. \quad (36)$$

Les coefficients des  $(H_{ij})$  sont fonctions de  $l_r, l_\varphi$  et du petit paramètre  $\varepsilon$ . L'équation (32) admettant une singularité en  $r = 0$ , nous levons celle-ci en réécrivant cette équation dans le repère rectangulaire  $(C, \vec{X}, \vec{z})$ . Pour cela, nous tenons compte de (26) et (31) et nous posons

$$\tilde{x} = R^{-1}x \quad \text{et} \quad \tilde{z} = \left(\frac{d}{2}\right)^{-1} z. \quad (37)$$

Nous obtenons

$$\frac{\partial^2 \widehat{H}_0}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \widehat{H}_0}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{\varepsilon^2}{\tilde{x}} \frac{\partial \widehat{H}_0}{\partial \tilde{x}} = \frac{(M+m)g}{2\pi^3 ab P_0} \quad ; \quad 1 - \varepsilon < \tilde{x} < 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 < \tilde{z} < 1. \quad (38)$$

Nous choisissons  $k = \frac{\pi}{2l_\varphi}$ . De sorte qu'en prenant  $l_x = l_z = l_r$  sur les axes  $(O, \vec{X})$  et  $(O, \vec{z})$ , nous obtenons pour  $r = 0$ , par application de (34) et (35) à (38), le schéma aux différences finies suivant

$$\frac{H_{2,2k+1} - 2H_{11} + H_{21}}{l_r^2} + \frac{H_{2,k+1} - 2H_{11} + H_{2,3k+1}}{l_\varphi^2} + \frac{\varepsilon^2(H_{21} - H_{2,2k+1})}{2l_r} = \frac{(M + m)g}{2\pi^3 ab P_0}. \quad (39)$$

Pour la condition aux limites, nous posons

$$\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial r} \Big|_{r=1} = \frac{3H_{ij} - 4H_{i-1j} + H_{i-2j}}{2l_r} + o(l_r^2) \quad ; 1 \leq j \leq 4k, \quad i \text{ fixé.} \quad (40)$$

Tenant compte de (40), nous allons adjoindre aux équations (36) et (39) le schéma suivant correspondant à  $r = 1$

$$3H_{ij} - 4H_{i-1j} + H_{i-2j} = 2l_r \delta_{1j} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq 4k, \quad i \text{ fixé} \quad (41)$$

où  $(\delta_{ij})$  désigne le symbole de Kronecker.

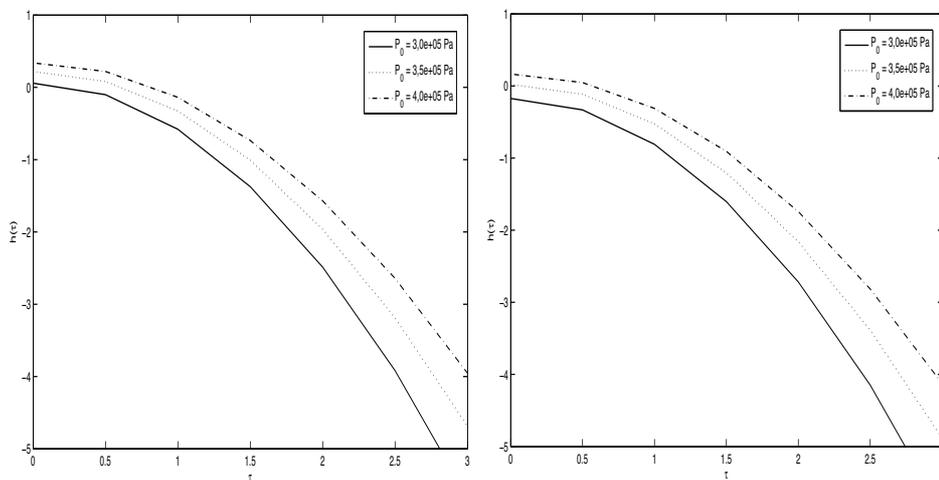
Pour la simulation numérique, nous prenons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} d = 0.2m, \quad R = 0.3m, \quad a = 0.06m, \quad b = 0.03m, \quad M + m = 615Kg \\ g = 9.8m/s^2, \quad l_r = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad l_\varphi = \frac{\pi}{6}. \end{aligned} \quad (42)$$

La pression  $P_0$  prend respectivement les valeurs :

$$3.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad 3.5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad \text{et} \quad 4.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}. \quad (43)$$

Nous obtenons les graphiques suivants



**Figure 2.** Evolution de  $h$  en  $O$  (à gauche) et en  $M_{33}$  (à droite) pour différentes valeurs de la pression  $P_0$

En analysant la figure obtenue, nous remarquons qu'à la résonance, l'onde acoustique  $h$  tend d'autant plus vite vers l'infini que la pression à l'intérieur du domaine  $\mathcal{T}$  diminue.

---

## 5. Conclusion

Notre analyse a montré qu'à l'échelle de temps rapide  $R/C_0$ , le mouvement de l'air dans un tore en rotation et excité périodiquement en surface engendre une onde acoustique. Celle ci est mise en évidence à l'ordre un du développement asymptotique avec le nombre de Mach  $M_{tr}$  comme petit paramètre de perturbation. Nous avons en outre établi que le mode associé à  $p = 0$  est un pôle de résonance acoustique. Une étude numérique de l'onde acoustique associée à ce pôle a permis de montrer qu'à la résonance le sous-gonflage du pneumatique fait décroître plus rapidement cette onde acoustique vers l'infini, lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$ .

---

## 6. Bibliographie

- [1] J. ADOU, « Modelling of a resonant inertial oscillation within a torus. », *Arch. of Applied Mech.*, vol. 71, pp 695-702, 2001.
- [2] J. Adou, « Etude de la résonance du mode géostrophique dans un tore. », *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 327 Série II b, pp. 1391-1396, 1999.
- [3] J. ADOU, « Sur l'origine aérodynamique du danger de sous-gonflage des pneumatiques. », *Entropie 234*, pp 54-60, 2001.
- [4] R. Dautray, J. L. Lions, « Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. », *MASSON*, 1984.
- [5] C. Gulpin, « *Manuel de calcul numérique appliqué.* », EDP sciences, pp 210-214, 2000.
- [6] J.-P. Guiraud, R. Zeytounian, « Evolution d'ondes acoustiques sur une longue période : le concept d'écoulement incompressible avec densité fonction du temps. », *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série II, pp 75-77, 1980.
- [7] F. G. Leppington, H. Levine, « The sound field of a pulsating sphere in unsteady rectilinear motion. », *Proc. Roy. Soc. London*, A412, pp 199-221, 1987.