

ARIMA

## Nouvelle Méthode d'approximation du flux diffusif sur un maillage non-structuré 3D

Badé R. \*,<sup>1</sup>, Chaker H. \*,<sup>2</sup>, Domelevo K. \*\*,<sup>3</sup>, Abdelwahed M. \*,<sup>4</sup>

\* LAMSIN-Ecole Nationale d'Ingenieurs de Tunis, BP: 37, 1002 Tunis, Tunisie

\*\* MIP-UPS Institut de Mathématiques de Toulouse, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 9

**E-mails** <sup>1</sup> rabe.bade@lamsin.rnu.tn, <sup>2</sup> hedia.chaker@enit.rnu.tn, <sup>3</sup> komla.domelevo@math.univ-toulouse.fr, <sup>4</sup> mohamed.abdelwahed@lamsin.rnu.tn



**RÉSUMÉ.** Dans ce travail, nous présentons un nouveau schéma d'approximation du flux diffusif sur un maillage hexaédrique non-structuré 3D. Ce schéma s'appuie sur une idée qui consiste à utiliser l'approximation par différences finies centrées tout en se libérant de la contraignante condition d'orthogonalité. Le principe consiste alors à effectuer un changement de base adéquat.

**ABSTRACT.** In this work, we present a new scheme to approximate the diffusif flux on a hexahedral 3D unstructured mesh. This scheme is based on the following idea: use the cell centred finite difference approximation without be obliged to verify the constraining orthogonality condition. The principle consists in carrying out an adequate change of bases.

**MOTS-CLÉS :** Maillage non-structuré, Méthode des volumes finis, Flux diffusif.

**KEYWORDS :** Unstructured mesh, Finite volume method, Diffusif flux.



---

## 1. Introduction

L'opérateur de diffusion intervient dans plusieurs types des modèles décrivant divers problèmes physiques. En volumes finis la méthode classique utilisée pour approximer le flux numérique induit par cet opérateur est la méthode des différences finies centrées [1], [2], [5]. Mais l'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne s'applique que sur des maillages dont la droite joignant les barycentres des deux mailles adjacentes est orthogonale à leur interface commune. Pour surmonter cette contrainte majeure on trouve dans la littérature l'utilisation de maillage dual [3], [8]. Mais construire ce genre de maillage en 3D est d'une grande complexité voire hors de portée. On trouve aussi comme dans [6] en 2D, où l'auteur considère toujours les deux mailles adjacentes mais crée à l'intérieur de celles-ci deux points tel que la droite portée par ces deux points soit orthogonale à l'interface et applique ainsi les différences finies centrées utilisant une interpolation des inconnues aux barycentres des mailles concernées. Ici également en 3D le choix de la direction où prendre l'intersection sera d'une grande difficulté. Dans notre approche, nous présentons un schéma qui utilise au mieux les différences finies centrées tout en surmontant la condition d'orthogonalité. Ceci passe alors par la construction d'une nouvelle base dans laquelle les différences finies sont possibles. Vu que le vecteur porté par la droite qui passe par les deux barycentres des mailles adjacentes n'est pas colinéaire à la normale, la projection de l'approximation du gradient interfacial par un schéma différences finies centrées utilisant les inconnues discrètes de part et d'autre de l'interface nous fait perdre de l'information. Pour cela, nous avons besoin de compléter ce vecteur par deux autres vecteurs linéairement indépendants qui vont nous permettre de corriger cette valeur projetée. Pour pouvoir utiliser les valeurs dont nous disposons nous allons créer quatre points artificiels qui vont nous donner les deux autres directions dont nous avons besoin et ces points sont les milieux des segments joignant les barycentres des mailles se trouvant au dessus en dessous, devant et derrière l'interface sur laquelle nous voulons approcher le flux. Les valeurs de nos inconnues en ces points seront les moyennes des valeurs aux barycentres. La même construction de ces points a été considérée par F. Naifar [9] et P. Wilders et al [9]. Le premier dans le but de construire une nouvelle cellule  $P_i$  contenant l'interface et calcule ainsi la moyenne du gradient dans cette nouvelle cellule :  $\nabla c \approx \frac{1}{|P_i|} \int_{P_i} \nabla c \, dx$ . Le second en dimension deux mais avec un maillage triangulaire.

---

## 2. Equation mathématique

Nous-nous intéressons dans ce travail à la résolution numérique de l'équation de la chaleur et qui est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\Delta u = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Omega. \quad [1]$$

Où  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$ ,  $u(\cdot, \cdot)$  est l'inconnue du problème et  $c$  une constante positive.

L'équation (1) est complétée par une condition initiale et une condition aux limites :

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad u(t, x) = u_b(t, x) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad [2]$$

Où  $u_0(\cdot)$  et  $u_b(\cdot, \cdot)$  sont supposées connues et ayant toutes les bonnes propriétés pour que la solution de (1) existe.

---

## 3. Résolution numérique

La méthode de discrétisation spatiale que nous allons utiliser dans ce travail est la méthode des volumes finis voir [4], [5] pour plus des détails. Le domaine physique  $\Omega$  est ainsi partitionné en des polyèdres  $M_i$ , appelés mailles, pour former un maillage en ouverts connexes disjoints. L'inconnue  $u(t, \cdot)$  est alors approximée par une fonction constante sur chaque maille. Nous approximons la condition initiale par des fonctions constantes par maille que nous notons  $u_i^0$ . Considérons  $\Delta t = \frac{T}{N}$  le pas de discrétisation où  $N$  est un entier fixé et  $t^n = n\Delta t$ , la donnée de la solution approchée dans la maille  $M_i$  au temps  $t^n$  est notée par  $u_i^n$ . Le principe de la méthode des volumes finis consiste alors à intégrer l'équation (1) sur  $[t^n, t^{n+1}] \times M_i$ . On obtient ainsi à l'aide de la formule de Green l'égalité suivante :

$$(u_i^{n+1} - u_i^n)|M_i| - c\Delta t \sum_{\sigma_{ij} \in \partial M_i} \int_{\sigma_{ij}} (\nabla u^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{ij}) d\Gamma = 0. \quad [3]$$

Où  $\sigma_{ij}$ ,  $\mathbf{n}_{ij}$ ,  $|M_i|$  sont successivement l'interface commune entre deux mailles  $M_i$  et  $M_j$ , la normale extérieure sur la  $j$ -ième face de la maille  $M_i$  et la mesure de la maille  $M_i$ .

### 3.1. Approximation du flux diffusif

Dans le cas d'un maillage où la normale à l'interface  $\sigma_{ij}$  passe par les barycentres  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{X}_j$  des deux mailles qui lui sont adjacentes, le calcul du flux diffusif  $\Phi^D = \int_{\sigma_{ij}} (\nabla u \cdot \mathbf{n}_{ij}) d\Gamma$  qui apparait dans (3) peut se faire par un schéma de différences finies centrées utilisant les valeurs des inconnues en ces points [1], [2]. Dans le cas contraire une telle approximation n'est plus valable. Pour surmonter cette difficulté nous construisons une

nouvelle base dans laquelle l'approximation de  $\Phi^D$  est possible par différences finies. Pour cela le meilleur choix est celui de prendre  $\overrightarrow{\overline{X}_i \overline{X}_j}$  comme premier vecteur. Et les deux autres seront successivement  $\overrightarrow{\overline{X}_a \overline{X}_b}$  et  $\overrightarrow{\overline{X}_c \overline{X}_d}$  avec  $\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b, \mathbf{X}_c, \mathbf{X}_d$  respectivement milieux des barycentres des deux mailles qui sont au dessus, en dessous, devant et derrière l'interface sur laquelle nous voulons approcher le flux figure (1).

$$\mathbf{X}_a = \frac{\mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_6}{2}, \quad \mathbf{X}_b = \frac{\mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_5}{2}, \quad \mathbf{X}_c = \frac{\mathbf{X}_9 + \mathbf{X}_{10}}{2}, \quad \mathbf{X}_d = \frac{\mathbf{X}_7 + \mathbf{X}_8}{2}.$$

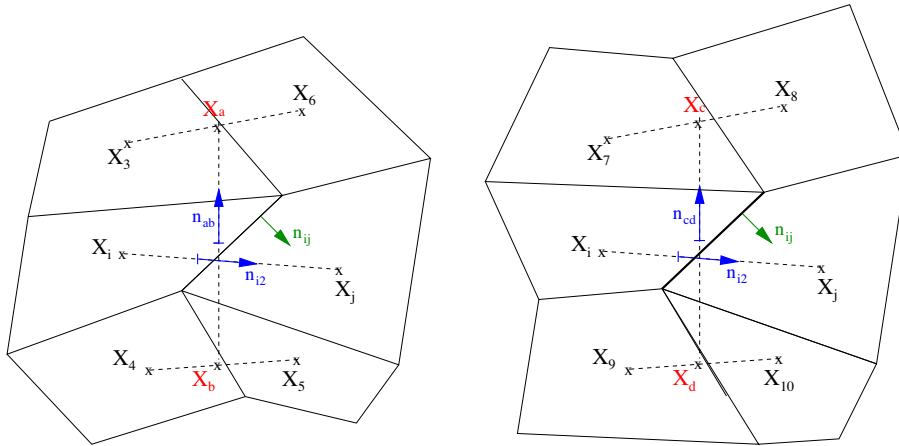
Nous calculons alors le flux dans cette nouvelle base et après nous le projetons dans la direction normale, ce qui nous permet d'aboutir à l'approximation suivante :

$$\nabla u \cdot \mathbf{n}_{ij} \approx \frac{u_j - u_i}{D_{i,2}} [\mathcal{P}^{-1}]_1 \cdot \mathbf{n}_{ij} + \frac{u_a - u_b}{D_{a,b}} [\mathcal{P}^{-1}]_2 \cdot \mathbf{n}_{ij} + \frac{u_c - u_d}{D_{c,d}} [\mathcal{P}^{-1}]_3 \cdot \mathbf{n}_{ij} \quad [4]$$

où  $u_a, u_b, u_c$  et  $u_d$  sont déterminées comme suit :

$$u_a = \frac{u_3 + u_6}{2}, \quad u_b = \frac{u_4 + u_5}{2}, \quad u_c = \frac{u_9 + u_{10}}{2}, \quad u_d = \frac{u_7 + u_8}{2}.$$

$\mathcal{P}$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $(\overrightarrow{\overline{X}_i \overline{X}_j}, \overrightarrow{\overline{X}_a \overline{X}_b}, \overrightarrow{\overline{X}_c \overline{X}_d})$ . Pour définir  $\mathcal{P}$  nous adoptons la même terminologie utilisée dans [7]. La notation  $[\mathcal{P}^{-1}]_j$  signifie la  $j^{ieme}$  ligne de la matrice  $\mathcal{P}^{-1}$ , et enfin  $D_{i,j} = d(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$ ,  $D_{a,b} = d(\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b)$  et  $D_{c,d} = d(\mathbf{X}_c, \mathbf{X}_d)$ .



**Figure 1.** Construction des points : plan XOZ (G), plan XOY (D)

Remarque : Dans le cas d'un maillage structuré, on a  $[\mathcal{P}^{-1}]_1 \cdot \mathbf{n}_{ij} = 1$  et  $[\mathcal{P}^{-1}]_2 \cdot \mathbf{n}_{ij} = [\mathcal{P}^{-1}]_3 \cdot \mathbf{n}_{ij} = 0$ . Ainsi les contributions du flux dans les deux directions engendrant le plan de l'interface seront nulles, et nous retrouvons l'approximation classique utilisée dans la littérature.

## 4. Résultats numériques

Dans cette partie, nous allons procéder à la validation de notre schéma. Nous utilisons pour cela l'équation de la chaleur dont la solution exacte est connue. Ceci nous permettra de valider notre résolution mais également le traitement qu'on fait des conditions au bord. Le domaine est  $\Omega = [0, L] \times [0, L] \times [0, L]$  avec une frontière  $\partial\Omega$  partagée en trois parties définies comme suit :

$$\Gamma_1 = \{x = 0, (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \quad \Gamma_2 = \{x = L, (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \quad \Gamma_3 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

La figure 2 donne les différents maillages utilisés : maillage 1 : 10x10x10 (G), maillage 2 : 20x20x20 (M) et le maillage 3 : 40x40x40 (D). Avec l'abréviation : G (gauche), M (milieu) et D (droite).

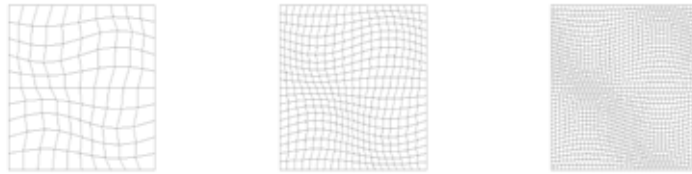


Figure 2. Plan coupe du maillage

### Test 1 Dirichlet-Dirichlet

$$\begin{cases} \rho C_v \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = 0 \\ u(x = 0, y, z, t) = u_1 & \Gamma_1 \\ u(x = L, y, z, t) = u_2 & \Gamma_2 \\ u = u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) & \Gamma_3 \end{cases}$$

### Test 2 Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} \rho C_v \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = 0 \\ u(x = 0, y, z, t) = u_1 & \Gamma_1 \\ u(x = L, y, z, t) = u_2 & \Gamma_2 \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \Gamma_3 \end{cases}$$

### Test 3 Dirichlet fonction du temps

$$\begin{cases} \rho C_v \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = 0 \\ u(x = 0, y, z, t) = \exp^{-\frac{12\pi}{L^2} \frac{k}{\rho C_v} t} \sin \frac{2\pi y}{L} \sin \frac{2\pi z}{L} & \Gamma_1 \\ u(x = L, y, z, t) = \exp^{-\frac{12\pi}{L^2} \frac{k}{\rho C_v} t} \sin \frac{2\pi y}{L} \sin \frac{2\pi z}{L} & \Gamma_2 \\ u = 0 & \Gamma_3 \end{cases}$$

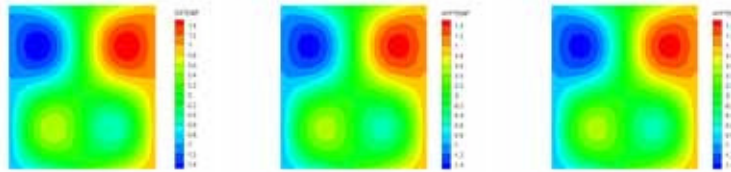
La solution exacte du Test 1 :

$$u(x, y, z, t) = \exp^{-\frac{12\pi}{L^2} \frac{k}{\rho C_v} t} \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L} \sin \frac{2\pi z}{L} + u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1).$$

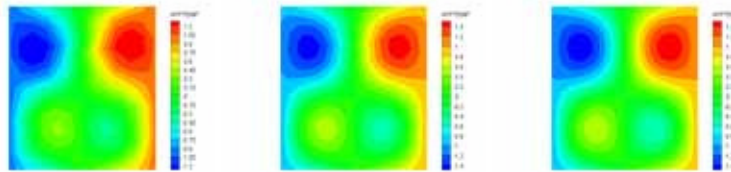
La solution exacte du **Test 2** :

$$u(x, y, z, t) = \exp^{-\frac{12\pi}{L^2} \frac{k}{\rho C_v} t} \sin \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{2\pi y}{L} \cos \frac{2\pi z}{L} + u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1)$$

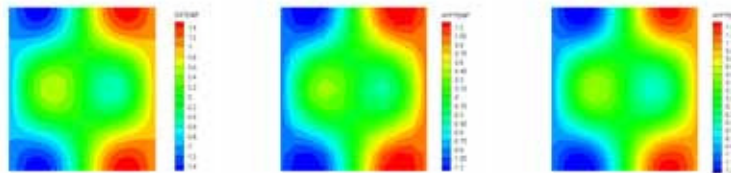
La solution exacte du **Test 3** :  $u(x, y, z, t) = \exp^{-\frac{12\pi}{L^2} \frac{k}{\rho C_v} t} \cos \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L} \sin \frac{2\pi z}{L}$



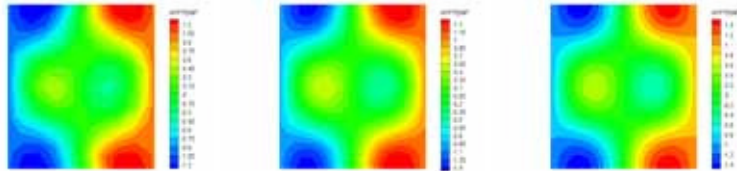
**Figure 3. Test 1** : cas structuré, plan  $y=0.25$ . La solution exacte (G), solution approchée : sur maillage 1 (M), sur maillage 2 (D)



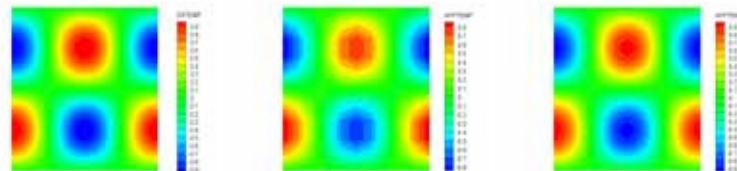
**Figure 4. Test 1** : cas non-structuré, plan  $y=0.25$ . La solution approchée : sur maillage 1 (G), sur maillage 2 (M), sur maillage 3 (D)



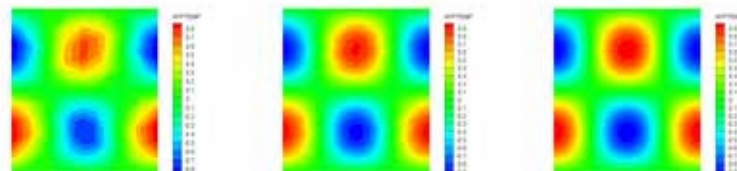
**Figure 5. Test 2** : cas structuré, plan  $y=0.5$ . La solution exacte (G), solution approchée : sur maillage 1 (M), sur maillage 2 (D)



**Figure 6. Test 2** : cas non-structuré, plan  $y=0.5$ . La solution approchée : sur maillage 1 (G), sur maillage 2 (M), sur maillage 3 (D)



**Figure 7. Test 3** : cas structuré, plan  $y=0.25$ . La solution exacte (G), solution approchée : sur maillage 1 (M), sur maillage 2 (D)



**Figure 8. Test 3** : cas non-structuré, plan  $y=0.25$  : La solution approchée : sur maillage 1 (G), sur maillage 2 (D)

Les figures 3-8, montrent clairement que plus on raffine le maillage, plus on se rapproche de la solution exacte. Et ceci exprime la pertinence de notre méthode ainsi que de notre schéma. Dans le tableau 1 nous donnons l'erreur relative  $L^\infty$  en fonction du pas de discrétisation.

$h$	Erreur $L^\infty$
0.1	$2.50.10^{-3}$
0.05	$5.32.10^{-4}$
0.025	$8.80.10^{-5}$

$h$	Erreur $L^\infty$
0.1	$3.08.10^{-2}$
0.05	$2.61.10^{-2}$
0.025	$4.45.10^{-3}$

$h$	Erreur $L^\infty$
0.1	$2.82.10^{-2}$
0.05	$2.49.10^{-2}$
0.025	$1.56.10^{-2}$

**Tableau 1.** Erreur  $L^\infty$  : Test 1 (G), Test 2 (M), Test 3 (D).

## 5. Bibliographie

- [1] BOIVIN S., CAYRÉ F., HÉRARD J. M., « A finite volume method to solve the Navier-Stokes equations for incompressible flows on unstructured meshes. » , *Int. J. therm. Sciences*, 39, 806-825, 2000.
- [2] BOIVIN S., HÉRARD J. M., PERRON S., « A Finite Volume method to solve the 3D Navier Stokes equations on unstructured colocated meshes. » , *Computers and Fluids*, 33(10), 1305-1333, 2004.
- [3] DOMELEVO K., OMNES P., « A finite volume scheme for the laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids. » *M2AN*, 39(6), 1203-1249, 2005.
- [4] EDWIGE G, RAVIART P A. « Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws. » *Collection Applied Mathematical Sciences* 118. Springer-Verlag New York, 1996.
- [5] EYMARD R., GALLOUËT T., HERBIN R., « Finite volume methods. » , *Handbook of Numerical Analysis*, vol(7) (Ciarlet P. G., Lions J. L. eds), North Holland, p 713-1020, 2000.
- [6] FAILLE I., « A control volume method to solve an elliptic equation on two-dimensional irregular mesh. » , *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 100, 275-290, 1992.
- [7] IVAR A., « An Introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids. » , *Computational Geosciences.*, 6, 405-432, 2002.
- [8] MANZINI G., RUSSO A., « A finite volume method for advection diffusion problems in convection-dominated regimes. » *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197, 1242-1261, 2008.
- [9] F. NAIFAR, « A finite volume solver for the simulation of the transport processes. » *PhD Delft University of Technology*, 2006, The Netherlands
- [9] P. WILDERS AND G. FOTIA, « A positive spatial advection schemes on unstructured meshes for tracer transport. » *Journal of Comp. And Appl. Mathematics*, 140, 809-821, 2002