

CARI'2010, 18-21 Octobre 2010

## Méthode multipôles rapide pour le couplage entre éléments finis et représentation intégrale

Eric DARRIGRAND <sup>\*1</sup>, Nabil GMATI <sup>\*\*2</sup>, Rania RAIS. <sup>\*\*3</sup>

\* Université de Rennes1 France, \*\* ENIT-LAMSIN, Tunisie.

**E-mails:** <sup>1</sup> eric.darrigrand-lacarrieu@univ-rennes1.fr, <sup>2</sup> nabil.gmati@ipein.rnu.tn,  
<sup>3</sup> rania.rais@lamsin.rnu.tn



**RÉSUMÉ.** On se propose d'étudier la méthode multipôles rapide pour le couplage entre éléments finis et représentation intégrale en vue de la résolution numérique des problèmes de diffraction d'ondes acoustiques par un obstacle 3D.

**ABSTRACT.** We propose to study the Fast Multipole Method for a coupling of finite elements and integral representation for problems of diffraction of acoustic wave by a three dimension obstacle.

**MOTS-CLÉS :** Méthode multipôles rapide, Problème de diffraction, Représentation intégrales, éléments finis.

**KEYWORDS :** Fast Multipole Method, Diffraction problem, Integral representation, Finite element.



---

## 1. Introduction

Nous nous intéressons à la résolution numérique du problème de Helmholtz dans un domaine non borné de  $\mathbf{R}^3$ . Notre objectif est la mise en œuvre d'une méthode de couplage entre éléments finis et représentation intégrale. Après discrétisation, cette méthode nous amène à résoudre un système linéaire impliquant une matrice éléments finis classique ainsi qu'un bloc plein dû à la représentation intégrale. Le calcul limitant un algorithme itératif est le coût du produit matrice-vecteur, qui pour une matrice pleine de taille  $N$ , est proportionnel à  $N^2$ . Dans des applications physiques, on est amené à considérer des situations où le nombre d'onde est très grand. Et comme  $N$  croît avec le nombre d'onde de manière quadratique pour une surface, le produit matrice-vecteur devient très coûteux. Pour surmonter ce problème, on fait appel à la méthode multipôles rapide (FMM) [5, 6] qui réduit les coûts en temps de calcul et en place mémoire du produit matrice-vecteur. La FMM existe sous deux formes : la méthode mononiveau permet de calculer le produit matrice-vecteur en  $O(N^{3/2})$  opérations. La méthode multiniveaux permet d'obtenir une complexité de l'ordre de  $O(N \ln N)$ . Nous proposons d'étudier et de mettre en œuvre la méthode FMM mononiveau dans le cadre de la méthode de couplage entre éléments finis et représentation intégrale. Nous exposons une étude de la complexité de la méthode FMM dans ce cas et des tests numériques en se basant sur un code programmé en fortran 90 et sur la librairie MÉLINA [1] afin de montrer l'apport de la FMM pour ce problème.

---

## 2. Méthode CEFRI pour le problème de Helmholtz

### 2.1. Problème de diffraction

Notre objectif est d'étudier la perturbation  $u$  d'une onde incidente plane induite par la présence d'un obstacle  $\Omega_i$  de frontière  $\Gamma$  :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_e = \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\Omega_i}, \\ \partial_n u = f & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{||x||=R} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - iku \right|^2 d\gamma = 0. \end{cases} \quad (1)$$

avec  $k > 0$  le nombre d'onde et la donnée de  $f$  provient de l'onde incidente. Lorsque  $f \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , ce problème admet une unique solution dans  $H_{loc}^1(\Omega_e)$  [2]. La deuxième condition est la condition de rayonnement de Sommerfeld qui définit le comportement à l'infini. Le problème est posé sur le complémentaire du corps dans  $\mathbf{R}^3$ . Plusieurs méthodes permettent de se ramener à un domaine de calcul borné. Nous nous proposons d'utiliser "la méthode de couplage entre éléments finis et représentation intégrale" qu'on notera dans la suite **CEFRI** [3]. L'idée de la méthode CEFRI consiste à introduire un bord  $\Sigma$  qui entoure l'obstacle sur lequel on définit une condition aux limites au moyen d'une représentation intégrale. On se ramène alors à un problème posé dans le domaine borné  $\Omega$ , contenu entre les frontières  $\Sigma$  et  $\Gamma$ .

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u = f & \text{sur } \Gamma, \\ (\partial_n - ik)u(x) = (\partial_n - ik) \int_{\Gamma} (u(y)\partial_{n_y} G(x, y) - f(y)G(x, y)) d\gamma(y) & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2)$$

$G$  étant la fonction de Green associée à l'équation de Helmholtz en 3D définie par

$$G(x, y) = -\frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|}.$$

L'équivalence entre le problème extérieur (1) et (2) est développée dans [3].

## 2.2. Formulation variationnelle du problème et discrétisation

La formulation variationnelle du problème (2) consiste à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que pour tout } \bar{v} \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \bar{v}(x) dx - k^2 \int_{\Omega} u(x) \bar{v}(x) dx - ik \int_{\Sigma} u(x) \bar{v}(x) d\sigma(x) \\ - \int_{\Sigma} D_{\Gamma} u(x) \bar{v}(x) d\sigma(x) = \int_{\Gamma} f(x) \bar{v}(x) d\gamma(x) - \int_{\Sigma} S_{\Gamma} f(x) \bar{v}(x) d\sigma(x) \end{array} \right. \quad (3)$$

où les opérateurs  $D_{\Gamma}$  et  $S_{\Gamma}$  sont définis par :  $\forall v \in L^2(\Gamma) \forall x \in \Sigma$

$$D_{\Gamma} v(x) = \int_{\Gamma} v(y) \partial_{n_y} K(x, y) d\gamma(y) \quad \text{et} \quad S_{\Gamma} v(x) = \int_{\Gamma} v(y) K(x, y) d\gamma(y)$$

avec le noyau  $K$  défini par  $K(x, y) = (\partial_{n_x} - ik)G(x, y)$ .

On remarque que la condition artificielle imposée sur le bord  $\Sigma$  est non locale ; ceci se traduit par le fait que le terme  $\int_{\Sigma} D_{\Gamma} u(x) \bar{v}(x) d\sigma(x)$  couple les points de la frontière  $\Sigma$  à ceux de  $\Gamma$ . De plus, il est intéressant de remarquer que les surfaces  $\Sigma$  et  $\Gamma$  sont disjointes. Ainsi, les termes intégraux intervenant dans la formulation variationnelle ne comportent pas de singularité. La discrétisation de (3) par une approximation d'éléments finis standard donne le système linéaire dont les inconnues sont les valeurs nodales  $u_{\alpha}$  de la variable inconnue  $u_h$

$$(A - C)U = F^{\Gamma} - F^{\Sigma} \quad (4)$$

$$A_{\beta\alpha} = \int_{\Omega} \nabla w_{\alpha}(x) \nabla w_{\beta}(x) dx - k^2 \int_{\Omega} w_{\alpha}(x) w_{\beta}(x) dx - ik \int_{\Sigma} w_{\alpha}(x) w_{\beta}(x) d\sigma(x),$$

$$C_{\beta\alpha} = \int_{\Sigma} D_{\Gamma}(w_{\alpha})(x) w_{\beta}(x) d\sigma(x),$$

$$F_{\alpha}^{\Gamma} = \int_{\Gamma} f(x) w_{\alpha}(x) d\gamma(x), \quad F_{\beta}^{\Sigma} = \int_{\Sigma} S_{\Gamma}(f)(x) w_{\beta}(x) d\sigma(x).$$

La matrice  $A$  est creuse. Par contre la matrice  $C$  comporte un bloc plein dû au couplage des deux frontières du domaine de calcul. La matrice  $A - C$  est complexe et non hermitienne. De plus la matrice  $A - C$  est mal conditionnée et si on choisit  $A$  comme préconditionneur le système (4) devient alors

$$(I - A^{-1}C)U = A^{-1}(F^{\Gamma} - F^{\Sigma}). \quad (5)$$

Si on pose  $H(x, y) = \partial_{n_y} K(x, y) \forall (x, y) \in \Sigma \times \Gamma$ , par interpolation sur les fonctions de bases éléments finis, on approche la fonction  $H$ . La matrice  $C$  peut s'écrire alors sous la forme  $C = P_{\Sigma}^t M^{\Sigma} \mathcal{H} M^{\Gamma} P_{\Gamma}$  avec  $P_{\Gamma} \in M_{N_{\Gamma}, N_{\Omega}}(\mathbf{R})$  (resp.  $P_{\Sigma} \in M_{N_{\Sigma}, N_{\Omega}}(\mathbf{R})$ ) la matrice de projection sur  $\Gamma$  (resp. sur  $\Sigma$ ) et  $\mathcal{H}_{ij} = H(x_i, y_j)$  avec  $M^{\Sigma}$  (resp.  $M^{\Gamma}$ ) la matrice de masse sur  $\Sigma$  (resp. sur  $\Gamma$ ).

REMARQUE. — En suivant le raisonnement précédent et en adoptant les mêmes notations, le terme  $F^\Sigma$  peut s'écrire comme produit matrice-vecteur  $F^\Sigma_\beta = \sum_{\alpha=1}^{N_\Gamma} \mathcal{R}_{\beta\alpha} f_\alpha$  où  $\mathcal{R} = P_\Sigma^t M^\Sigma \mathcal{K} M^\Gamma$  et  $f_\alpha$  est la  $\alpha^{\text{ième}}$  composante de  $f$ .

Pour le système (5), au cours de différentes étapes du procédé itératif de l'algorithme de GMRES, on a besoin d'évaluer un produit matrice-vecteur. Le coût de cette opération dépend de la nature de la matrice : Si la matrice est creuse comme c'est le cas pour les matrices de masse et de rigidité, le produit matrice-vecteur a un coût très faible en  $O(pN_\Omega)$  où  $p$  est la largeur de bande de la matrice. Par contre l'évaluation du produit matrice-vecteur impliquant la matrice pleine  $\mathcal{H}$  ou  $\mathcal{K}$  est très coûteux en  $O(N_\Gamma N_\Sigma)$ . C'est la raison pour laquelle on fait appel à la méthode multipôles rapide.

### 3. Application de la FMM à CEFRI en 3D

Soit un ensemble de points  $(x_l)$  repartis de manière assez uniforme sur un domaine  $\Sigma$  et des points  $(y_m)$  repartis sur  $\Gamma$ . On construit un pavage de la région de l'espace qui contient les  $(x_l)$  et les  $(y_m)$ . En 3D, on choisit un cube qui contient toutes les particules  $(x_l)$  et  $(y_m)$ . On construit le pavage de manière récursive : à chaque étape, on subdivise chaque cube en huit cubes identiques. Ainsi de suite jusqu'à obtenir une taille de boîtes convenables et un nombre de particules par boîte convenable. Par abus d'écriture, on notera  $B_l$  la boîte contenant un point  $x_l$  donné et  $C_l$  le centre de  $B_l$ . Pour une boîte  $B$  du pavage, on note  $\mathcal{V}(B)$  l'ensemble de boîtes "proches" de  $B$ .  $B' \notin \mathcal{V}(B)$  signifie qu'il existe  $\alpha < 1$  tel que

$$\forall x \in B \quad \forall y \in B' \quad |y - C_{B'}| + |x - C_B| < \alpha |C_B - C_{B'}|$$

avec  $C_B$  est le centre de la boîte  $B$  et  $C_{B'}$  le centre de la boîte  $B'$ . On va étudier le produit de la matrice  $\mathcal{H}$ , vue dans la section 2, par un vecteur donné  $v$ .

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}v)_l &= (\mathcal{H}^{proche} v)_l + (\mathcal{H}^{loin} v)_l \\ &= \sum_{B' \in \mathcal{V}(B_l)} \sum_{m/y_m \in B'} H(x_l, y_m) v_m + \sum_{B' \notin \mathcal{V}(B_l)} \sum_{m/y_m \in B'} H(x_l, y_m) v_m \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{H}_{lm}^{proche} = \begin{cases} \mathcal{H}_{lm} & \text{si } x_l \text{ et } y_m \text{ appartiennent à des boîtes proches} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\mathcal{H}_{lm}^{loin} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_l \text{ et } y_m \text{ appartiennent à des boîtes proches} \\ \mathcal{H}_{lm} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le produit  $(\mathcal{H}^{proche} v)_l$  est calculé d'une manière classique. Par contre le calcul de  $(\mathcal{H}^{loin} v)_l$  est déterminé à l'aide de la méthode FMM. Le calcul de  $(\mathcal{H}^{loin} v)_l$  est basé sur un développement judicieux du noyau de Green. En fait, l'idée de base de la méthode multipôles rapide est de tenter de séparer les variables  $x_l$  (les points cibles) et  $y_m$  (les points sources). La fonction de Green s'écrit :

$$G(k, |x_l - y_m|) = \frac{-ik}{4\pi} h_0^{(1)}(k|x_l - y_m|)$$

où  $h_0^{(1)}$  désigne la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre zéro.

**Théorème d'addition de Gegenbauer :**

$$h_0^{(1)}(k|r_0 + r|) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q (2q+1) h_q^{(1)}(k|r_0|) j_q(k|r|) P_q(\cos(r, r_0)) \quad (6)$$

où  $|r| < |r_0|$  avec  $r_0 = C_l - C_m$  et  $r = r_l - r_m$  où  $r_l = x_l - C_l$ ;  $r_m = y_m - C_m$ .  
 $\cos(r, r_0)$  : le cosinus de l'angle entre les vecteurs  $r$  et  $r_0$ ;  $P_q$  : les polynômes de Legendre. La convergence de cette série est assurée si et seulement si  $r$  et  $r_0$  vérifient la relation  $|r| < |r_0|$ . Cette contrainte oblige de distinguer les couples de boîtes voisines des couples de boîtes non voisines.

**Formule de Funk-Hecke :** En adoptant les notations vues précédemment on a :

$$j_q(k|r|) P_q(\cos(r, r_0)) = \frac{(i)^q}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} P_q(\cos(s, r_0)) e^{ik(s, x_l - C_l)} e^{-ik(s, y_m - C_m)} ds \quad (7)$$

où  $\mathcal{S}$  est la sphère unité de  $\mathbf{R}^3$  et  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire de  $\mathbf{R}^3$ .

En tronquant la série de Gegenbauer (6) et en discrétisant (7), on a

$$(\mathcal{H}^{loin} v)_l = \frac{ik^3}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^S w_p (1 - (s_p, n_{x_l}) e^{ik(s_p, x_l - C_l)}) \sum_{B' \notin \mathcal{V}(B_l)} \mathcal{T}_{r_0}^Q(s_p) \sum_{m/y_m \in B'} e^{-ik(s_p, y_m - C_m)} (s_p, n_{y_m}) v_m$$

avec

$$\mathcal{T}_{r_0}^Q(s) = \sum_{q=0}^Q (-i)^q (2q+1) P_q(\cos(s, r_0)) h_q^{(1)}(k|r_0|) \quad (8)$$

Deux approximations sont nécessaires pour l'évaluation numérique de notre calcul. La première est la troncature de la série : Dans la littérature, on trouve de nombreuses formules empiriques. Par exemple une étude de Koc et al [4] a abouti à la formule suivante  $Q = k|r| + C(k|r|)^{\frac{1}{3}}$ . Pour les tests numériques on choisit  $C = 2.5$  qui est un choix empirique qui provient de tests qui ont été faits sur des cas concrets avec de très grands nombres d'inconnues. La seconde approximation va être la discrétisation sur la sphère unité

$$S = (2Q+1) \times (Q+1). \quad (9)$$

**Algorithme FMM un niveau**

Etape 0 : Partie indépendante du vecteur  $v$

$$\begin{aligned} \forall r_0 \quad \forall s_p \quad \mathcal{T}_{r_0}^Q(s_p) &= \sum_{q=0}^Q \frac{(-i)^q}{4\pi} (2q+1) P_q(\cos(s_p, r_0)) h_q^{(1)}(k|r_0|) \\ \forall y_m \quad \forall s_p \quad f_m(s_p) &= (s_p, n_{y_m}) e^{-ik(s_p, y_m - C_m)} \\ \forall x_l \quad \forall s_p \quad g_l(s_p) &= (1 - (s_p, n_{x_l})) e^{ik(s_p, x_l - C_l)} \end{aligned}$$

où  $h_q^{(1)}$  désigne la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre  $q$ .

Etape 1 : Rassemblement de l'information dans le centre de la boîte source.

$$\forall B_m \quad \forall s_p \quad F_{B_m}(s_p) = \sum_{m/y_m \in B_m} f_m(s_p) v_m$$

Etape 2 : Transfert de l'information des boîtes sources  $B_m$  vers la boîte cible  $B_l$ .

$$\forall B_l \quad \forall s_p \quad G_{B_l}(s_p) = \sum_{B_m \notin \mathcal{V}(B_l)} T_{r_0}^Q(s_p) F_m(s_p)$$

Etape 3 : Passage de l'information de  $C_l$  vers le point cible  $x_l$ .

$$\forall B_l \quad \forall l/x_l \in B_l \quad (\mathcal{H}^{loin v})_l = \frac{ik^3}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^S w_p g_l(s_p) G_{B_l}(s_p)$$

Le produit de la matrice  $\mathcal{H}$  par un vecteur nécessite  $O\left(\frac{N^2}{M} + NM\right)$  opérations et  $O\left(N + \frac{N^2}{M}\right)$  place mémoire où  $N$  est le nombre de degrés de liberté sur  $\Sigma$  et  $\Gamma$  et  $M$  est le nombre de boîtes contenant chacune de ces surfaces. La valeur  $M = \sqrt{N}$  minimise l'expression  $MN + \frac{N^2}{M}$  d'où une complexité optimale de  $N^{3/2}$  pour les calculs et pour la place mémoire.

## 4. Résultats numériques

### 4.1. Application de la FMM à CEFRI

Nous exposons dans cette partie des expériences numériques en trois dimensions réalisées à l'aide de l'environnement de programmation MÉLINA. Nous considérons un obstacle sphérique de rayon  $R = 1$  centré à l'origine et soumis à une onde incidente plane. Nous étudions à partir de deux maillages différents l'écart entre la solution exacte du problème de diffraction et celle fournie par la résolution du problème par la méthode GMRES avec et sans FMM lorsque l'obstacle est illuminé par un champ incident de longueur d'onde  $\lambda$ . On désigne par GMRES le code GMRES sans FMM et par GMRES+FMM le code de GMRES avec FMM. Dans ce qui suit, on adopte les notations suivantes :

Erreur sans FMM : erreur quadratique relative entre la solution calculée par GMRES et la solution exacte du problème.

Erreur multipôles : erreur quadratique relative entre la solution calculée par GMRES et GMRES+FMM.

Erreur avec FMM : erreur quadratique relative entre la solution calculée par GMRES+FMM et la solution exacte du problème.

Temps E.F : temps de calcul des éléments finis sur les domaines.

Temps LU : temps de la factorisation LU de la matrice  $A$ .

Temps GMRES : temps de calculs de GMRES.

Temps GMRES+FMM : temps de calculs de GMRES+FMM.

Le tableau 1 montre bien qu'on a une bonne précision et des temps de calculs très satisfaisants, compte tenu de la taille des problèmes traités et de la machine utilisée (un

		$k = 4.1$ 1024 points	$k = 8.2$ 4098 points
Opérations communes (s)	Temps EF	0.36	3.09
	Temps LU	0.16	2.8
Opérations GMRES sans FMM (s)	Calcul noyau de green	8.40	136.43
	Calcul matrice de green	0.37	19.17
	Résolution	0.22	2.78
Opérations GMRES+FMM (s)	Précalculs	$Q = 4$ 0.59	$Q = 8$ 29.51
	Résolution	0.43	3.91
Erreur sans FMM		0.21e-1	0.22e-1
Erreur avec FMM		0.19e-1	0.22e-1

**Tableau 1.** Temps d'exécution et précision pour GMRES et GMRES+FMM : cas 1024 points sur  $\Gamma$  et  $\Sigma$  et 4098 points sur  $\Gamma$  et  $\Sigma$ .

PC Pentium Dual-Core à 2 GHz). Le gain du calcul de la FMM est dû au fait que pour un point donné de  $\Sigma$  on ne calcule plus tous les noyaux de Green pour tout point de  $\Gamma$  comme c'est fait dans MÉLINA et qui est très coûteux surtout lorsqu'on a un très grand nombre de nœuds sur les deux frontières du domaine de calcul. En fait le produit FMM est décomposé en somme d'interactions proches et lointaines comme c'est présenté dans la section 3. Le calcul des interactions proches nécessite le calcul des noyaux de Green pour un nombre de points sur  $\Gamma$  bien défini et qui est nettement inférieur à celui de MÉLINA et ceci est fait dans la partie précalculs de la FMM (Voir Tableau 1). Et pour le calcul des interactions lointaines c'est juste un assemblage des informations précalculées (voir l'algorithme FMM un niveau) sans avoir besoin des calculs de noyaux de Green.

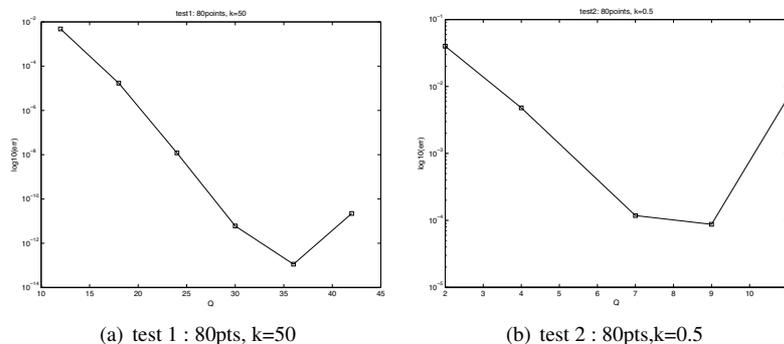
Dans la suite, nous étudions la précision et le temps d'exécution de chaque solveur en faisant varier le paramètre de troncature  $Q$ .

$Q$	4	8	12	16
Erreur multipôles	0.66e-2	0.97e-4	0.55e-5	0.1e-5
Erreur avec FMM	0.19e-1	0.21e-1	0.21e-1	0.21e-1
Temps GMRES+FMM (s) :	1.54	2.08	3.19	4.63

**Tableau 2.** Précision et temps de calcul en fonction de  $Q$ , Cas 1024 points sur  $\Gamma$  et  $\Sigma$ .

On peut conclure que l'erreur sur le calcul du noyau de Green décroît lorsque  $Q$  augmente. Par contre cette erreur reste bien inférieure à l'erreur éléments finis qui est pour ce cas 0.21e-1. Elle est inférieure à 0.66e-2. Ainsi, l'erreur multipôles ne change pas la précision entre la solution calculée par GMRES+FMM et la solution exacte qui est de même ordre que celle entre la solution exacte du problème et la solution calculée par GMRES. Le choix de  $Q$  est imposé par le code de calcul de telle sorte qu'on n'a pas d'instabilité numérique. Mais, on se permet de modifier  $Q$  dans ce test numérique afin de montrer l'impact de  $Q$  sur le temps de calcul sans gain de précision entre la solution calculée par GMRES+FMM et la solution exacte. Par conséquent, il est inutile d'augmenter le paramètre de troncature  $Q$ . Il suffit de choisir  $Q = 4$ . Pour spécifier l'instabilité numérique due à l'accumulation des fonctions de Hankel dans l'opérateur des transferts (8), regardons une configuration simple :  $\Sigma = [(0, 0, 0), (1, 0, 0)]$  et  $\Gamma = [(0, 0.1, 0.1), (1, 0.1, 0.1)]$  avec une discrétisation 80 points par domaine. Dans la figure (a), on a  $k = 50$  (soit

$\lambda = 10h$ ) et dans la figure (b) on a  $k = 0.5$  (soit  $\lambda = 1000h$ ). Au regard des figures (a) et



(b), nous remarquons une instabilité numérique pour les deux cas, mais elle survient plus vite dans le deuxième test, montrant l'importance de la cohérence entre la discrétisation et le nombre d'onde.

---

## 5. Conclusion

Nous avons présenté la méthode de couplage entre éléments finis et représentation intégrale pour la résolution du problème de Helmholtz tridimensionnel non borné. Et dans ce cadre nous avons mis en œuvre la méthode multipôles rapide mononiveau. Nous avons obtenu des résultats numériques satisfaisants pour lesquels le gain du coût de calcul devient important et sans perte de précision. Ainsi, dans le cas du couplage entre éléments finis et représentation intégrale la méthode FMM reste une réponse aux problèmes de la montée en fréquence.

---

## 6. Bibliographie

- [1] D. MARTIN, *Guide de l'utilisateur. IRMAR, Université de Rennes I et ENSTA. Paris, 2000.* <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina>.
- [2] R. DAUTRAY, J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Vol. 6, Masson, 1988.
- [3] C. HAZARD, M. LENOIR, *Modélisation et résolution des problèmes de diffraction*, cours de L'ENSTA et de DEA de Mécanique, *cours de L'ENSTA et de DEA de Mécanique, Paris VI, ENSTA SMP, centre de l'Yvette, Palaiseau, 1995.*
- [4] S.KOC, J.M. SONG AND W.C. CHEW., *Error Analysis for the Numerical Evaluation of the Diagonal Forms of the Scalar Spherical Addition Theorem.* SIAM J. Numer. anal., 36(3) :906-921, April 1999.
- [6] R. COIFMAN, V. ROKHLIN, AND S. WANDZURA, *The Fast Multipole Method for the Wave Equation : A Pedestrian Prescription.* IEEE Antennas and Propagation Magazine, 35(3) :7-12, June 1993.
- [5] E. DARVE, *The Fast Multipole Method : Numerical Implementation.* J. Comput. Phys., 160(1) :195-240, 2000.