

Commande optimale en temps minimal d'un procédé biologique d'épuration de l'eau

Walid Bouhafs ^a — Nahla Abdellatif ^{b,a} — Frédéric Jean ^c — Jérôme Harmand ^{d,e}

^a Laboratoire de Modélisation Mathématique et Numérique dans les Sciences de l'Ingénieur (LAMSIN), Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT), BP 37, Le Belvédère 1002 Tunis, Tunisie.

^b Ecole Nationale des Sciences de l'Informatique, Université de Manouba Campus Universitaire, 2010, Manouba, Tunisie.

^c ENSTA, UMA, 32 bld Victor, 75739 Paris, France.

^d Laboratoire de Biotechnologie de l'Environnement, INRA, Avenue des Etangs, 11100 Narbonne, France.

^e Projet INRIA-INRA MODEMIC, UMR MISTEA, Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Statistique pour l'Environnement et l'Agronomie, 2, place Pierre Viala, 34060 Montpellier, France.



RÉSUMÉ. Dans ce travail, on considère un problème de contrôle d'un procédé biologique séquentiel discontinu pour le traitement de la pollution. Ce modèle fait intervenir deux réactions biologiques, l'une étant aérobie et l'autre anoxique. On s'intéresse, dans un premier temps, à un problème de contrôle optimal en temps minimal puis en temps et en énergie. On prouve l'existence de trajectoires optimales et on calcule, dans chaque cas, les contrôles optimaux correspondants.

ABSTRACT. In this work, we consider an optimal control problem of a biological sequencing batch reactor for the treatment of pollutants. This model is formed of two biological reactions, one being aerobic and the other, anoxic. We are interested in a problem of optimal control in time and then, in both time and energy. The existence of the optimal trajectories is proven and the corresponding optimal controls are derived in each case.

MOTS-CLÉS : Contrôle optimal, réacteur biologique séquentiel discontinu, traitement de l'eau.

KEYWORDS : Optimal control, sequencing batch reactor, water treatment.

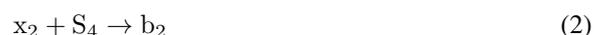


1. Introduction

L'épuration des eaux usées par voie biologique reste aujourd'hui l'une des méthodes les plus utilisées. Le traitement biologique des polluants organiques et/ou chimiques consiste en la transformation de la matière biodégradable en boues (biomasse sous forme solide). Le principe est de mettre en contact des micro-organismes et les polluants dans des enceintes (réacteurs) dont il est possible de contrôler les conditions environnementales. A la fin du traitement, il faut séparer les boues et l'eau épurée qui est rejetée dans l'environnement. En absence d'agitation, les bactéries décantent sous l'effet de la gravité. En cas de surcharge hydraulique (perturbations dans les flux en entrée de système) la décantation peut être perturbée et la qualité de l'effluent peut se dégrader car elle peut alors contenir des matières particulaires. Le recours à des réacteurs séquentiels discontinus permet de pallier à ce problème. Il s'agit d'alterner les phases aérobies, anoxiques et de décantation dans le même réacteur : ces bioréacteurs permettent donc de découpler ces différentes opérations dans le temps plutôt que dans l'espace lorsqu'elles sont réalisées dans des réacteurs différents. Le prix à payer est que le système considéré fonctionne maintenant en mode batch et non plus en continu. Il nécessite donc la mise en place en amont d'un bassin de stockage des eaux usées qui arrivent, elles, continuellement à la station. Dans ce cas, un problème est de minimiser le temps pendant lequel le réacteur est indisponible, c'est-à-dire le temps de réaction si on suppose le temps de décantation constant. Plusieurs travaux se sont intéressés à la mise au point d'algorithmes de contrôle optimal en temps minimal des SBR ([2], [3]), et, en particulier, d'une stratégie permettant de déterminer les instants de commutation entre phases aérobie et anoxique, pour minimiser le temps total de réaction. Nous nous intéressons, dans ce travail, à un modèle où les réactions aérobies et anoxiques peuvent être simultanées, en considérant la concentration d'oxygène comme variable de contrôle. Il s'agit de modéliser mathématiquement deux réactions biologiques qui traitent deux types de substrats (les composés à dégrader) distincts. Ces deux réactions sont respectivement limitées et inhibées, l'une étant favorisée par l'oxygène (réaction aérobie) alors que la seconde est inhibée (réaction anoxique ou aérobie). Dans un premier temps, on s'intéresse à la mise au point d'une stratégie de contrôle optimal en temps minimal, puis en temps et en énergie, afin de minimiser à la fois le temps de réaction et la concentration d'oxygène consommé.

2. Modélisation

On considère les réactions biologiques suivantes :



où x_1 et x_2 désignent les substrats qu'on cherche à éliminer, b_1 et b_2 sont les biomasses, c'est-à-dire les concentrations en bactéries qui consomment respectivement x_1 et x_2 pour leur croissance.

La première réaction est une réaction favorisée par la présence d'oxygène tandis que la

seconde est inhibée par l'oxygène.

La concentration en oxygène S_4 est considérée comme la commande dans ce système. On la notera donc par la lettre u dans la suite. En supposant que l'on s'intéresse à un système fonctionnant en mode batch, le modèle du bioprocédé s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{b}_1 = \mu_1(x_1, u)b_1, \\ \dot{x}_1 = -\mu_1(x_1, u)b_1, \\ \dot{b}_2 = \mu_2(x_2, u)b_2, \\ \dot{x}_2 = -\mu_2(x_2, u)b_2, \end{cases} \quad (3)$$

où la fonction de croissance μ_1 est croissante par rapport à u et la fonction μ_2 est décroissante par rapport à u .

On fait, dans un premier temps, les hypothèses suivantes :

H₁ : $\mu_1(x_1, u) = f_0(x_1)\mu(u)$ et $\mu_2(x_2, u) = g_0(x_2)(k - \mu(u))$, avec $k > 0$, f_0 et g_0 deux fonctions positives, dérivables, bornées et qui vérifient $f(0) = g(0) = 0$. μ est une fonction positive, dérivable, croissante et vérifie $\mu(0) = 0$ et $\mu(u_{max}) = K$, $u_{max} \in]0, k]$.

$$\mathbf{H}_2 : 0 \leq u(t) \leq u_{max}.$$

On pose $M_1 = x_1(0) + b_1(0)$ et $M_2 = x_2(0) + b_2(0)$. Notons que l'on a : $x_1(t) + b_1(t) = M_1$ et que $x_2(t) + b_2(t) = M_2$, pour tout t positif. Sans perte de généralité, supposons que $M_1 = M_2 = 1$.

Le système (3) est alors équivalent au système bidimensionnel :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\mu(u)f(x_1), \\ \dot{x}_2 = -(k - \mu(u))g(x_2). \end{cases} \quad (4)$$

avec f et g deux fonctions positives, dérivables, bornées et qui vérifient $f(0) = g(0) = 0$ et $f(1) = g(1) = 0$.

Le but est de régler la concentration d'oxygène u afin d'amener les concentrations x_1 et x_2 en dessous d'un certain seuil.

3. Problème de contrôle en temps minimal

Le premier problème que l'on considère est d'amener en temps minimal les concentrations x_1 et x_2 en dessous de seuils spécifiés par l'utilisateur. Cet objectif se formule comme un problème de contrôle optimal.

3.1. Spécification du problème

On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Minimiser } t(u), \\ u \in L^\infty([0, t_e(u)], [0, u_{max}]), \\ x \text{ solution de (4) tel que } x(0) = x^0 \text{ et } x(t(u)) \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

où $\mathcal{C} = [0, a] \times [0, b]$ et $(a, b) \in]0, 1[^2$. Nous nous intéressons aux trajectoires qui partent de $x^0 \in]0, 1[^2$ (les concentrations initiales des substrats) et qui atteignent la cible (\mathcal{C}) (les concentrations souhaitées) en un temps minimal.

3.2. Solutions optimales

On commence par énoncer les deux résultats suivants :

Proposition 3.1 *Pour tout $x^0 \in]0, 1[^2$, il existe un contrôle $u \in L^\infty([0, t_f], [0, u_{max}])$ tel que la trajectoire $x_u(\cdot)$ relie x^0 à la cible \mathcal{C} .*

Proposition 3.2 *Pour toute condition initiale $x^0 \in]0, 1[^2$, il existe une solution au problème (\mathcal{P}).*

Pour déterminer les trajectoires optimales, nous décomposons le domaine complémentaire de la cible en trois régions. Soient D_1 , D_2 et D_3 les trois domaines disjoints définis par :

$$D_1 = [0, a[\times]b, +\infty[, \quad (5)$$

$$D_2 = [a, +\infty[\times]b, +\infty[, \quad (6)$$

$$D_3 = [a, +\infty[\times [0, b[. \quad (7)$$

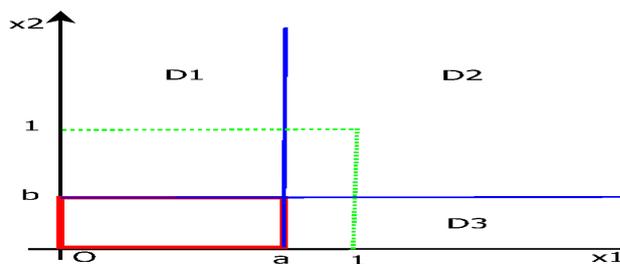


Figure 1. Partition du domaine complémentaire à la cible

Nous avons établi une description complète de la synthèse optimale du problème (\mathcal{P}) que nous énonçons comme suit :

Theorem 3.1 *Pour toute condition initiale $x^0 \in]0, 1[\times]0, 1[$, il existe une trajectoire correspondant à la résolution du problème en temps minimal. Ces trajectoires sont caractérisées comme suit :*

– Si $x^0 \in D_1$, la trajectoire optimale du problème (\mathcal{P}) est unique. C'est le segment vertical qui part de x^0 .

– Si $x^0 \in D_3$, la trajectoire optimale du problème (\mathcal{P}) est unique. C'est le segment horizontal qui part de x^0 .

– Si $x^0 \in D_2$, il existe une infinité de trajectoires optimales pour le problème (\mathcal{P}). Ces trajectoires touchent la cible au point $\bar{x} = (a, b)$ (coin de la cible). De plus le temps minimal pour atteindre la cible à partir de ces conditions initiales ne dépend pas du contrôle et est donné par : $t_f = \frac{1}{u_{max}} \left(\int_a^{x_1^0} \frac{ds}{f(s)} + \int_b^{x_2^0} \frac{ds}{g(s)} \right)$.

Remarquons que si la cible est a priori petite (i.e. les seuils a et b sont petits), alors la condition initiale est quasiment toujours dans D_2 . Quand la condition initiale est dans D_2 , il y a une infinité de trajectoires optimales (toutes atteignent le coin). D'où la question supplémentaire : laquelle choisir ? selon quel critère ? C'est la raison pour laquelle on définit maintenant le problème (\mathcal{Q}) qui s'énonce comme suit :

$$(\mathcal{Q}) \begin{cases} \text{Minimiser} & \int_0^{t_f} u^2(s) ds, \\ u \in L^\infty & ([0, t_e(u)], [0, u_{max}]), \\ x \text{ solution de (4)} & \text{tel que } x(0) = x^0 \text{ et } x(t_f) = \bar{x}. \end{cases}$$

La résolution du problème (\mathcal{Q}) consiste à déterminer parmi l'infinité de trajectoires optimales en temps celle qui consomme le minimum d'oxygène et donc celle qui minimise l'énergie d'aération.

4. Minimisation en temps et en énergie

Le problème en temps minimal a été résolu et on a trouvé dans la section précédente les lois de commande en oxygène qui permettent d'atteindre la cible en temps minimal. Cependant l'oxygénation du système a un coût, et ces lois minimales en temps peuvent s'avérer très coûteuses. On s'intéresse donc maintenant à des critères qui prennent en compte ce coût en pénalisant la consommation d'oxygène.

4.1. Formulation du problème

Dans cette section, en ajoutant les hypothèses $\mu(u) = u$ et $k = u_{max}$ dans le modèle (4), on considère le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -uf(x_1), \\ \dot{x}_2 = -(u_{max} - u)g(x_2). \end{cases} \quad (8)$$

Nous cherchons à minimiser un compromis entre l'énergie liée à l'oxygène injecté dans le système et la durée totale de la réaction. Ce problème se traduit mathématiquement par la résolution du problème suivant :

$$(\mathcal{R}) \begin{cases} \text{Minimiser } C(t, u) = t(u) + \alpha \int_0^{t(u)} u^2(s) ds, & \alpha > 0, \\ u \in L^\infty([0, t_e(u)], [0, u_{max}]), \\ x \text{ solution de (8) tel que } x(0) = x^0 \text{ et } x(t_f) \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

On peut alors établir la proposition suivante :

Proposition 4.1 *Pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $x^0 \in]0, 1]^2$, il existe une unique solution pour le problème (\mathcal{R}) .*

On étudie séparément les cas où le coût de l'énergie considérée est assez faible ($\alpha \leq 1$) et le cas où le coût de l'énergie considérée est assez important ($\alpha > 1$).

4.2. Trajectoires optimales pour $\alpha \leq 1$

Ces trajectoires sont différentes selon que la condition initiale appartient au domaine D_1 , D_2 ou D_3 .

Proposition 4.2 *Pour $\alpha \leq 1$, si $x^0 \in D_1 \setminus \{x = 0\}$, la trajectoire optimale de (\mathcal{R}) est unique : c'est le segment vertical qui part de x^0 .*

Proposition 4.3 *Pour $\alpha \leq 1$, si $x^0 \in D_3 \setminus \{y = 0\}$, la trajectoire optimale de (\mathcal{R}) est unique : c'est le segment horizontal qui part de x^0 .*

Proposition 4.4 *Pour $\alpha \leq 1$, si $x^0 \in D_2$, il existe une unique solution pour le problème (\mathcal{R}) . La trajectoire optimale touche la cible au point $\bar{x} = (a, b)$ (le coin de la cible).*

On peut aussi déterminer la valeur du contrôle optimal et le temps nécessaire (minimal) pour atteindre la cible.

Proposition 4.5 *Si $x^0 \in D_2$, la trajectoire optimale du problème (\mathcal{R}) correspond au contrôle constant :*

$$u^0 = \frac{1}{t_f} \int_a^{x_1^0} \frac{ds}{f(s)}, \quad (9)$$

avec t_f le temps nécessaire pour atteindre la cible \mathcal{C} et qui est donné par la formule :

$$t_f = \frac{1}{u_{max}} \left(\int_a^{x_1^0} \frac{ds}{f(s)} + \int_b^{x_2^0} \frac{ds}{g(s)} \right).$$

Preuve Le Hamiltonien du problème (\mathcal{Q}) s'écrit :

$$H(x, p, p_0, u) = u\varphi(0) - u_{max}p_2g(x_2) + p_0(1 + \alpha u^2).$$

Avec $\varphi = -f(x_1)p_1 - g(x_2)p_2$ qui est constante sur tout \mathbb{R} et p_0 est une constante positive. On montre facilement que $p_0 \neq 0$. On suppose donc dans la suite que $p_0 = \frac{1}{2}$, alors :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, p, p_0, u) = \varphi + \alpha u = \varphi(0) + \alpha u, \quad (10)$$

L'équation (10) implique que si (x, p, p_0, u) minimise le Hamiltonien H , alors le contrôle $u = u^0$ est donné par :

$$\begin{cases} u^0 = -\frac{\varphi(0)}{\alpha} & \text{si} & \varphi(0) \in [-\alpha, 0], \\ u^0 = 0 & \text{si} & \varphi(0) \geq 0, \\ u^0 = 1 & \text{si} & \varphi(0) \leq -\alpha, \end{cases} \quad (11)$$

D'après (11), le contrôle optimal est constant sur $[0, t_f]$ et prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, -\frac{\varphi(0)}{\alpha}\}$. Or, si le contrôle u^0 prend les valeurs 0 ou 1, il correspond respectivement à des trajectoires verticales ou horizontales qui n'atteignent pas la cible. Donc, s'il existe un contrôle optimal solution du problème (\mathcal{R}) , on doit avoir $\varphi(0) \in [-\alpha, 0]$ et $u^0 = -\frac{\varphi(0)}{\alpha}$.

Déterminons d'abord le temps t_f , on a :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -uf(x_1), \\ \dot{x}_2 = -(u_{max} - u)g(x_2). \end{cases} \quad (12)$$

ce qui implique :

$$u = -\frac{\dot{x}_1}{f(x_1)}, \quad (13)$$

et

$$u_{max} - u = -\frac{\dot{x}_2}{g(x_2)}. \quad (14)$$

En faisant la somme (13) et (14) on obtient :

$$-u_{max} = \frac{\dot{x}_2}{f(x_2)} + \frac{\dot{x}_1}{g(x_1)}, \quad (15)$$

En intégrant (15) par rapport au temps, on déduit après un changement de variable que :

$$t_f = \frac{1}{u_{max}} \left(\int_a^{x_1^0} \frac{ds}{f(s)} + \int_b^{x_2^0} \frac{ds}{g(s)} \right). \quad (16)$$

Si le contrôle u^0 est optimal, alors il doit vérifier :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -u^0 f(x_1), \\ \dot{x}_2 = -(u_{max} - u^0)g(x_2). \end{cases} \quad (17)$$

On cherche à déterminer un scalaire u^0 tel que :

$$\begin{cases} x_1(t_f) = a, \\ x_2(t_f) = b, \end{cases} \quad (18)$$

En fin, les équations (17) et (18) impliquent que le contrôle u^0 est donné par :

$$u^0 = \frac{1}{t_f} \int_a^{x_1^0} \frac{ds}{f(s)}. \quad (19)$$

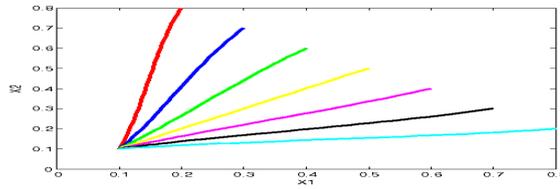


Figure 2. Exemples de trajectoires optimales qui partent de $x^0 \in D_2$

Remarque 4.1 En pratique, le fait que le contrôle optimal soit constant est intéressant puisqu'il n'y a pas de manoeuvre à effectuer pour injecter l'oxygène.

Remarque 4.2 On montre que la solution du problème (\mathcal{R}) est aussi la solution du problème (\mathcal{Q}) (avec $\mu(u) = u$) à temps fixé. On déduit donc l'équivalence entre le problème (\mathcal{Q}) et le problème (\mathcal{R}) . On peut donc résoudre le problème (\mathcal{R}) par une autre stratégie qui consiste à minimiser, dans un premier temps, le temps nécessaire pour atteindre la cible et déterminer, ensuite, parmi toutes ces solutions, celle qui consomme le minimum d'oxygène. On répond donc à la question posée à la fin de (3.2).

4.3. Trajectoires optimales pour $\alpha > 1$

Ce cas est différent de celui traité dans la section précédente. En effet, on peut établir les résultats suivants :

Proposition 4.6 Pour $\alpha > 1$, si $x^0 \in D_1 \setminus \{x = 0\}$, la trajectoire optimale de (\mathcal{R}) est unique : c'est le segment vertical qui part de x^0 .

Proposition 4.7 Pour $\alpha > 1$, soit $g_1(x_1) = \int_a^{x_1} \frac{ds}{f(s)}$ et $g_2(x_2) = \int_b^{x_2} \frac{ds}{g(s)}$.

On pose : $\Gamma = \{x^0 \in D_2 \cup D_3 \text{ tel que } \alpha u_{max}^2 (g_1(x_1^0))^2 \geq (g_1(x_1^0) + g_2(x_2^0))^2\}$.

Si $x^0 \in D_2 \cup D_3$, la trajectoire optimale solution de (\mathcal{R}) est unique et elle correspond au contrôle constant suivant :

$$\begin{cases} \bar{u} = u_{max} \frac{g_1(x_1^0)}{g_1(x_1^0) + g_2(x_2^0)} & \text{si} & x^0 \in (D_2 \cup D_3) \setminus \Gamma, \\ \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} & \text{si} & x^0 \in \Gamma. \end{cases} \quad (20)$$

Remarque 4.3

Ainsi quand le coût lié à l'oxygénation est relativement important (par rapport au coût lié au temps), il peut arriver que la stratégie optimale ne minimise pas le temps. Dans ce cas la concentration de l'un des substrats (x_2) sera inférieure au seuil de tolérance.

Remarque 4.4

Dans le cas où $\alpha = 1$, les résultats de 4.2 coïncident avec celles de 4.3.

5. Conclusion

Dans ce travail, on s'intéresse au contrôle d'un bioprocédé séquentiel discontinu pour le traitement de la pollution. Dans cet article, on a considéré un schéma réactionnel faisant intervenir deux réactions distinctes. L'une de ces deux réactions est aérobie et l'autre est anoxique. On s'est intéressé au problème de contrôle optimal où la variable de contrôle est la concentration d'oxygène.

Dans un premier temps, on a étudié un problème de contrôle en temps minimal. On a prouvé qu'il existe soit une unique trajectoire optimale, soit une infinité de trajectoires optimales selon la valeur de la condition initiale qui correspond à la concentration des substrats dans le réacteur.

Ensuite, on a étudié un autre problème de contrôle optimal où la fonction coût est un compromis entre le temps de réaction et l'énergie liée à l'aération. On a montré que si la proportion de l'énergie considérée est assez faible ($\alpha \leq 1$), il existe une unique trajectoire optimale. On a un résultat analogue si on commence par minimiser d'abord le temps ainsi que proposé dans la première partie du travail puis l'énergie. En revanche, si la proportion de l'énergie considérée est assez importante ($\alpha > 1$), la stratégie du cas précédent n'est plus optimale. On a alors montré qu'il existe une unique trajectoire optimale qui dépend de la condition initiale des concentrations en substrats.

Remerciements : Les auteurs remercient le projet TREASURE (projet INRIA Euromed 3+3) pour le soutien apporté à ce travail.

6. Bibliographie

- [1] E. TRÉLAT, « Contrôle optimal, théorie et applications. Vuibert, collection "Mathématiques concrètes" », (2005), 97-98.
- [2] D. MAZOUNI, « Thèse de doctorat – Optimisation de bioréacteurs séquentiels discontinus. », Université de Montpellier II, (2005).
- [3] for the wastewater treatment . », Optim. Control Appl. Meth., No 20, p 145-164, (1999).
- [4] F. BONNANS, P. ROUCHON, « Analyse et commande de systèmes dynamiques. », p 159-160, Edition de l'école polytechnique. Juillet 2006.