

ARIMA

Moyennisation du modèle dynamique de la prolifération du *Typha*

Mamadou Lamine Diagne ^{ab*} — Tewfik Sari ^{bc}

^a UMMISCO-Saint-Louis, Laboratoire d'Analyse Numérique et Informatique
Université Gaston Berger de Saint-Louis, BP 234, Saint-Louis, Sénégal
diagne12@yahoo.fr

^b Université de Haute Alsace, 4 rue des frères Lumière, 68093 Mulhouse, France
& EPI MERE INRIA-INRA, UMR MISTEA,
SupAgro Bât 21, 2, place Pierre Viala, 34060 Montpellier, France
Tewfik.Sari@uha.fr

^c Irstea, UMR ITAP, 361 rue Jean-François Breton 34196 Montpellier, France
tewfik.sari@irstea.fr

* Corresponding author.



RÉSUMÉ. Ce papier présente une analyse de stabilité d'un modèle de dynamique de prolifération d'une plante aquatique, le *Typha*. Le modèle considéré est un système dynamique à commutation qui a deux modes de fonctionnement. La méthode utilisée s'appuie sur la théorie de moyennisation d'équations différentielles ordinaires rapidement oscillantes. Une condition de stabilité de l'équilibre trivial commun des deux sous-systèmes qui composent le modèle est donnée.

ABSTRACT. This paper presents a stability analysis of a model of dynamic growth of the aquatic plant *Typha*. The model is a switching dynamical system that has two operating modes. The method is based on the theory of averaging of rapidly oscillating differential equations. A condition of stability of the trivial equilibrium of the two subsystems that make up the model is given.

MOTS-CLÉS : dynamique de croissance, stabilité, système à commutation, *Typha*

KEYWORDS : dynamic growth, stability, switching dynamical systems, *Typha*.



1. Introduction

Le *Typha* est une plante aquatique, invasive et pérenne. Il se développe grâce à deux modes de reproduction, dites *sexuée* et *végétative*, pouvant être simultanées en certaines périodes de l'année. La reproduction sexuée saisonnière donne naissance à des jeunes pousses provenant des graines ; elle se déroule entre les mois de mars et de juin. La multiplication végétative, dite aussi asexuée se fait à partir des rhizomes. Ce dernier mode de reproduction débute entre 3 et 6 mois après la germination de ses graines. Dans ce travail on s'intéresse au développement du typha dans le Parc National des Oiseaux de Djoudj en vue de contrôler sa prolifération. En effet, sous certaines conditions hydrologiques et écologiques, le Typha a la faculté de coloniser rapidement une zone et de se propager très loin des plants parents, voire son installation sur un terrain perturbé. Sa prolifération inquiétante dans le PNOD a occasionné beaucoup de nuisances.

Les méthodes de lutte utilisées depuis 1993 contre le Typha sont inefficaces et demandent de grands coûts financiers. Pour prendre en compte le phénomène de saisonnalité un modèle à commutation est proposé dans [1]. Une analyse séparée de stabilité des deux sous-systèmes est présentée dans [3]. Cependant la stabilité ou l'instabilité individuelle des sous-systèmes ne suffit pas pour conclure sur la stabilité du système dynamique à commutation associé.

Pour réduire la prolifération voir même sa disparition, nous nous intéressons particulièrement dans ce papier à l'étude de la stabilité de l'équilibre sans plante E_0 . Ce qui nous permet d'établir des conditions sous lesquelles le typha n'aura plus la possibilité de coloniser la zone. Pour cela, nous appliquons la technique de moyennisation à notre système à commutation pour le transformer en un système autonome [6]. Cette application nous permet de montrer que l'équilibre sans plante E_0 est asymptotiquement stable si le taux $\lambda_{moyen} < 1$.

Le reste de notre papier est organisé comme suit : dans la section 2, nous introduisons le modèle, dans la section 3, nous présentons la théorie de moyennisation. Cette méthode est appliquée à notre modèle dans la section 4. Dans la section 5, nous présentons les simulations numériques du modèle, avant de conclure dans la section 6.

2. Modèle

Le modèle dynamique développé dans [1, 2, 3] est décrit par le système (1) suivant, avec X_1 désignant le nombre des jeunes pousses provenant de la reproduction sexuée, X_2 celui des jeunes pousses provenant de la reproduction asexuée et X_3 le nombre des adultes. Les adultes se reproduisent selon les deux modes de reproduction. En désignant par K la capacité limitée d'accueil du milieu et $Y(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t)$ le nombre total de plantes à l'instant t , on obtient le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \theta(t)X_3(1 - Y/K) - (\gamma_1 + \mu_1)X_1, \\ \dot{X}_2 = c_2X_3(1 - Y/K) - (\gamma_2 + \mu_2)X_2, \\ \dot{X}_3 = \gamma_1X_1 + \gamma_2X_2 - \mu_3X_3, \end{cases} \quad (1)$$

où γ_1 (resp. γ_2) désigne le taux de passage de X_1 (resp. X_2) vers X_3 . Les coefficients μ_1 , μ_2 et μ_3 désignent respectivement les taux de mortalité dans les compartiments X_1 , X_2 et X_3 . Le terme $(1 - Y/K)$ désigne la probabilité de trouver de l'espace dans le milieu à l'instant t . Les paramètres $\theta(t)$ et c_2 désignent respectivement les taux de croissance sans contrainte d'espace d'émergence de jeunes pousses provenant de la reproduction sexuée et asexuée. Ce modèle se présente donc sous la forme d'un système non linéaire et non autonome d'équations différentielles ordinaires (pour plus de détails voir [2]). Nous supposons que le taux de reproduction saisonnière $\theta(t)$ est une fonction T périodique définie par

$$\theta(t) = \begin{cases} c_1 > 0, & \text{si } t \in [kT, (k + \alpha)T), \\ 0, & \text{si } t \in [(k + \alpha)T, (k + 1)T], \end{cases} \quad (2)$$

où αT , $0 \leq \alpha \leq 1$, est la fraction de l'année k ($k \in \mathbb{N}$) durant laquelle la reproduction sexuée s'effectue. En posant $x_1 = X_1/K$, $x_2 = X_2/K$ et $x_3 = X_3/K$ et $y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$, nous obtenons le modèle adimensionnel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \theta(t)x_3(1 - y) - (\gamma_1 + \mu_1)x_1, \\ \dot{x}_2 = c_2x_3(1 - y) - (\gamma_2 + \mu_2)x_2, \\ \dot{x}_3 = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 - \mu_3x_3. \end{cases} \quad (3)$$

Le système non autonome (3) est un système à commutation avec les deux sous-systèmes actifs suivants :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = c_1x_3(1 - x_1 - x_2 - x_3) - (\gamma_1 + \mu_1)x_1, \\ \dot{x}_2 = c_2x_3(1 - x_1 - x_2 - x_3) - (\gamma_2 + \mu_2)x_2, \\ \dot{x}_3 = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 - \mu_3x_3. \end{cases} \quad (4)$$

si $kT \leq t < (k + \alpha)T$, avec $k \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(\gamma_1 + \mu_1)x_1, \\ \dot{x}_2 = c_2x_3(1 - x_1 - x_2 - x_3) - (\gamma_2 + \mu_2)x_2, \\ \dot{x}_3 = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 - \mu_3x_3. \end{cases} \quad (5)$$

si $(k + \alpha)T \leq t < (k + 1)T$.

Le choix du sous-système actif est lié à un critère temporel (la commutation dépend du temps). La dynamique du système change après une durée prédéfinie. Le système est étudié dans le domaine suivant :

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}.$$

On définit le paramètre suivant :

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \text{où} \quad \lambda_1 = \frac{c_1\gamma_1}{\mu_3(\gamma_1 + \mu_1)} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{c_2\gamma_2}{\mu_3(\gamma_2 + \mu_2)}. \quad (6)$$

Une étude établie dans [2] montre que :

Proposition 1. *L'équilibre trivial du système (4) est globalement asymptotiquement stable si et seulement si $\lambda \leq 1$. L'équilibre trivial du système (5) est globalement stable si et seulement si $\lambda_2 \leq 1$.*

Dans la section suivante nous formulons le principe de la moyennisation avant d'établir une condition de stabilité de l'équilibre sans plante du système commuté. Nous montrerons que sous certaines conditions sur les coefficients du système (il faut qu'ils puissent être considérés comme petits), on peut définir aussi un λ_{moyen} , tel que la stabilité de l'équilibre trivial du système commuté s'écrit tout simplement $\lambda_{moyen} < 1$.

3. Méthode de moyennisation

On considère le système suivant, où f est une fonction continue

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon) \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1 \quad (7)$$

On suppose que la fonction $t \mapsto f(x, t, \varepsilon)$ est T -périodique. L'objectif est d'approximer les solutions du problème original (7) par celles d'un système indépendant du temps. On définit la fonction \bar{f} comme la moyenne en t de f sur une période :

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, 0) dt$$

La méthode de moyennisation [4, 6, 7] nous permet de conclure que les solutions du système non-autonome (7) sont approximées par les solutions du système autonome :

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y) \quad (8)$$

dit système moyenné du système (7). De façon plus rigoureuse, nous avons :

Théorème 1. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On suppose que l'équation moyennisée (8) a une solution unique pour toute condition initiale. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Soient y la solution du problème moyennisé (8) et $J = [0, w[$, $0 < w \leq \infty$, son demi-intervalle positif maximal d'existence. Alors, pour tout L dans J , et tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L, \delta)$ tel que pour tout ε dans $]0, \varepsilon_0]$, toute solution x de l'équation 7, à valeur initiale y_0 à $t = 0$, est définie au moins sur l'intervalle $[0, L]$ et vérifie l'inégalité $|x(t) - y(t)| < \delta$ pour tout t dans $[0, L]$.*

Remarque 1. *Si \bar{y} est un point fixe hyperbolique stable du système moyenné (8), alors l'approximation des trajectoires du système perturbé (7) par celles du système moyenné (8) devient valable pour $t \in [0; +\infty[$.*

4. Application

On s'intéresse à l'étude de la stabilité de la solution nulle de notre système dynamique à commutation. Pour cela, on réécrit notre système sous la forme (7) pour pouvoir utiliser le principe de la moyennisation développé précédemment. On suppose pour la suite que $\theta(t)^*$ est une fonction périodique de période T . Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \theta^*(t)x_3(1-y) - (\gamma_1^* + \mu_1^*)x_1 \\ \dot{x}_2 = c_2^*x_3(1-y) - (\gamma_2^* + \mu_2^*)x_2 \\ \dot{x}_3 = \gamma_1^*x_1 + \gamma_2^*x_2 - \mu_3^*x_3 \end{cases} \quad (9)$$

On suppose que les coefficients s'écrivent

$$\theta^* = \epsilon\theta, \quad c_2^* = \epsilon c_2, \quad \gamma_1^* = \epsilon\gamma_1, \quad \mu_1^* = \epsilon\mu_1, \quad \gamma_2^* = \epsilon\gamma_2, \quad \mu_2^* = \epsilon\mu_2, \quad \mu_3^* = \epsilon\mu_3.$$

On obtient système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \epsilon \left[\theta(t)x_3(1-y) - (\gamma_1 + \mu_1)x_1 \right] \\ \dot{x}_2 = \epsilon \left[c_2x_3(1-y) - (\gamma_2 + \mu_2)x_2 \right] \\ \dot{x}_3 = \epsilon \left[\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 - \mu_3x_3 \right] \end{cases} \quad (10)$$

Le résultat principal de moyennisation du théorème 1, s'applique dans notre cas si ϵ est petit, le système (10) admet comme système moyennisé

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \epsilon \left[\bar{\theta}x_3(1-y) - (\gamma_1 + \mu_1)x_1 \right] \\ \dot{x}_2 = \epsilon \left[c_2x_3(1-y) - (\gamma_2 + \mu_2)x_2 \right] \\ \dot{x}_3 = \epsilon \left[\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 - \mu_3x_3 \right] \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{avec } \bar{\theta} = \frac{1}{T} \int_0^T \theta(t)dt = \alpha c_1.$$

En termes d'échelles de temps, introduisons le nouveau temps $\tau = \epsilon t$. Le temps τ est donc un temps beaucoup plus lent que le temps t . On a

$$x'_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\epsilon} \dot{x}_i$$

A l'échelle de temps $\tau = \epsilon t$ le système (11) s'écrit

$$\begin{cases} x'_1 = \bar{\theta}x_3(1-y) - (\gamma_1 + \mu_1)x_1 \\ x'_2 = c_2x_3(1-y) - (\gamma_2 + \mu_2)x_2 \\ x'_3 = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 - \mu_3x_3 \end{cases} \quad (12)$$

Ce type de système est déjà étudié dans [2] et nous avons le paramètre

$$\lambda_{moyen} = \frac{\bar{\theta}\gamma_1}{\mu_3(\gamma_1 + \mu_1)} + \frac{c_2\gamma_2}{\mu_3(\gamma_2 + \mu_2)} = \alpha \frac{c_1\gamma_1}{\mu_3(\gamma_1 + \mu_1)} + \frac{c_2\gamma_2}{\mu_3(\gamma_2 + \mu_2)}$$

qui gouverne la stabilité du système.

Ainsi, pour un temps infini nous avons la stabilité du système (12)

Proposition 2. *Si $\lambda_{moyen} \leq 1$ alors l'origine de ce système (10) est globalement asymptotiquement stable dans Ω . Si $\lambda_{moyen} > 1$ alors l'origine du système est instable*

5. Simulations numériques

On considère les valeurs des coefficients suivants :

$$c_1 = 0.002; \quad c_2 = 0.012, \quad \gamma_2 = \frac{1}{6}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{8}, \quad \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{24}, \quad \mu_3 = \frac{1}{72}, \quad T = 12, \quad \alpha = \frac{1}{3}.$$

Pour une année $k \in \mathbb{N}$ nous avons donc

$$\theta(t) = \begin{cases} c_1, & \text{si } t \in [12k, (k + \frac{1}{3}) 12], \\ 0, & \text{si } t \in [(k + \frac{1}{3}) 12, (k + 1) 12], \end{cases}$$

Pour ces coefficients nous avons $\lambda_{moyen} = 0.7272 < 1$

On peut écrire le système sous la forme $\dot{x} = \epsilon f(t, x)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{6} \left[\theta(t)x_3(1-y) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) x_1 \right] \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{6} \left[0.002x_3(1-y) - \left(1 + \frac{1}{4} \right) x_2 \right] \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{6} \left[\frac{3}{4}x_1 + x_2 - \frac{1}{12}x_3 \right] \end{cases}$$

Donc la moyennisation s'applique ($\epsilon = \frac{1}{6} < 1$ est assez petit) et prédit que le système est approximé par le système moyennisé. Les simulations suivantes illustrent bien ce résultat.

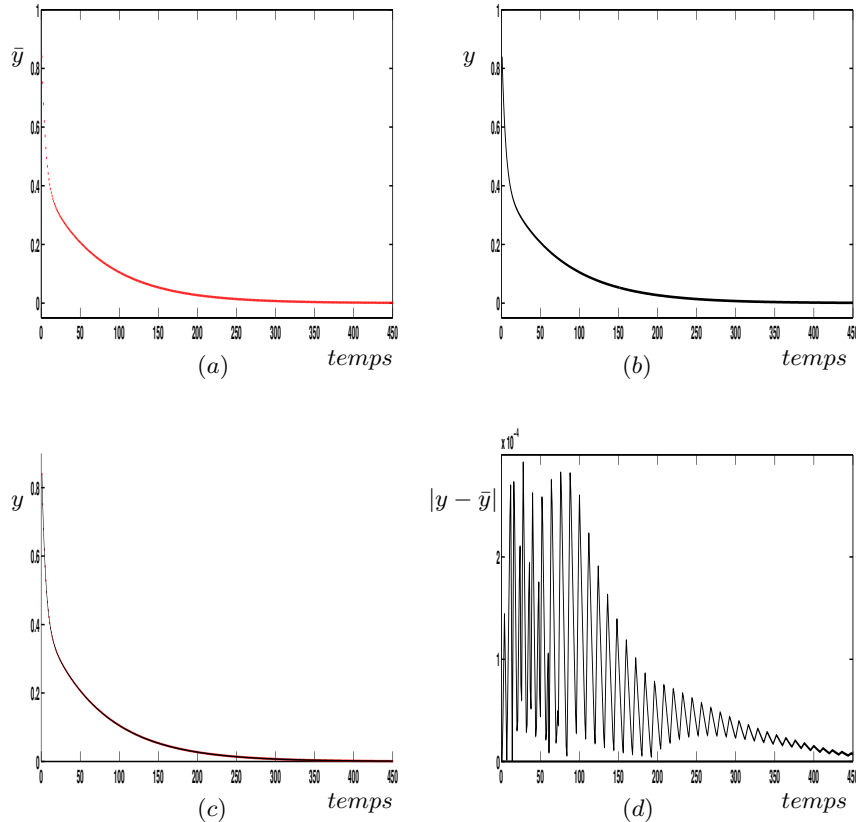


Figure 1 – (a) Évolution au cours temps de la population totale $y = x_1 + x_2 + x_3$ du système moyennisé avec la condition initiale $Y_0 = (0.12, 0.45, 0.27)$. (b) Évolution au cours du temps de la population totale du système à commutation avec la condition initiale $Y_0 = (0.12, 0.45, 0.27)$. (c) Superposition des deux courbes (a) et (b). (d) Évolution au cours temps de l'erreur d'approximation des deux solutions issue de la même condition initiale. Avec les valeurs des paramètres nous obtenons $\lambda_1 = 0.108$, $\lambda_2 = 0.6912$ et $\lambda_{moyen} = 0.7272$. Noter que dans (d) l'échelle des ordonnées est multipliée par 10^{-4} . (d) montre que les mojonants de l'erreur d'approximation définis dans le théorème 1 sont de puissance 10^{-4} et atteignent au cours du temps des puissances plus petites. Ainsi asymptotiquement l'approximation devient plus juste.

On peut constater, à l'examen de la comparaison graphique, l'approximation par la moyennisation fournit un résultat satisfaisant si $\lambda_{moyen} < 1$.

6. Conclusions

Dans ce papier nous avons utilisé un modèle représenté par un système dynamique à commutation pour étudier la dynamique de prolifération du *Typha*. Tout d'abord nous avons rappelé certains résultats de l'étude de chacun des sous-systèmes (4) et (5) qui composent le modèle (3) qui est développé dans [2]. Nous avons mis en évidence le paramètre λ_{moyen} , qui caractérise la moyenne des paramètres λ et λ_2 qui gouvernent respectivement la stabilité des sous-systèmes (4) et (5). Il est bien connu que la commutation de deux sous-systèmes peut conduire à des comportements paradoxaux [5]. En particulier, la commutation d'un système stable et d'un système instable, peut donner lieu à une instabilité ou une stabilité. Pour étudier la question de stabilité de l'équilibre sans plante E_0 de notre modèle, nous avons utilisé, la théorie de la moyennisation [6] [7]. Ainsi, nous avons une condition qui donne la stabilité de l'équilibre sans plante du système à commutation. Les simulations montrent que le système moyen approxime bien le système à commutation si $\lambda_{moyen} < 1$. La courbe de l'erreur d'approximation illustre une bonne convergence de la méthode puisqu'elle tend vers zéro. En perspective il serait intéressant d'étudier l'existence de cycle limite du système à commutation.

Remerciements : Les auteurs remercient, en dehors de leurs institutions, l'AUF (Horizons Francophones), l'UNESCO (C.B 32 12 31 10 DDK) et la coopération française (AIRES-Sud n° 7240) qui ont financé leurs recherches.

7. Bibliographie

- [1] DIAGNE M. L., N'DIAYE P. I., HANNE P.D., NOBA K., NIANE M. T. « Modélisation de la prolifération du *Typha* au voisinage d'un ouvrage hydraulique. » *En préparation*,
- [2] DIAGNE M. L., N'DIAYE P. I., SARI T., NIANE M.T., « Un modèle mathématique de la prolifération du *Typha*. » *CARI'10, Proceedings of the 10th African Conference on Research in Computer Science and Applied Mathematics, E. Badouel, A. Sbihi and I. Lokpo (Editors), INRIA (2010), pages 277-284.*
- [3] DIAGNE M. L., N'DIAYE P. I., NIANE M. T., SARI T. « Comportement asymptotique d'un modèle à commutation de la prolifération du *Typha* » Soumis ARIMA
- [4] LAKRIB M., SARI T. « Time Averaging for Ordinary Differential Equations and Retarded Functional Differential Equations » *Electron. J. Diff. Equ.*, Vol. 2010(2010), No. 40, pp. 1-24.
- [5] LOBRY C., SCIANDRA A., NIVAL P. « Paradoxical effects on growth and competition induced by fluctuations in environment. » *C. R. Acad. Sci.*, 102-107, 317 (1994).
- [6] SANDERS J. A., VERHULST F. « Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. » *Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer-Verlag* 1985.
- [7] SARI T. « Averaging for ordinary differential equations and functional differential equations. » *The strength of nonstandard analysis*, 286–305, SpringerWienNewYork, Vienna, 2007.