

Analyse et contrôle optimal d'un bioréacteur de dépollution des eaux usées

A. Ghouali ^{a,b,*} — T. Sari ^{b,c} — C. Lobry ^b — A. Moussaoui ^{a,d}
— J. Harmand ^{b,e}

^a Laboratoire d'Automatique, Université de Tlemcen- Algérie
ghouliamel@yahoo.fr

^b Projet Modemic, Inra/Inria, UMR Mistea,
2 place Viala 34060, Montpellier, France
lobrinria@wanadoo.fr

^c Irstea, UMR ITAP,
361 rue Jean-Francois Breton, 34196 Montpellier, France
Tewfik.Sari@supagro.inra.fr

^d Département de Mathématiques, Faculté des sciences, Université de Tlemcen- Algérie
moussaouidz@yahoo.fr

^e INRA, UR 050, Laboratoire de Biotechnologie de l'Environnement,
Avenue des Etangs, Narbonne F-11100, France
harmand@supagro.inra.fr

* Corresponding author.

RSUM. Dans cet article, nous résolvons un problème de commande optimale d'un bioréacteur de dépollution. Plus particulièrement, à partir d'un modèle simple de bioprocédé, nous nous intéressons au problème de la maximisation du biogaz produit par le système pendant un temps T . Pour des conditions initiales particulières, on montre que la solution au problème posé peut ne pas être triviale dépendant de contraintes sur l'actionneur. Dans le cas où l'actionneur est sous-dimensionné (cas non trivial), on résout le problème d'optimisation.

ABSTRACT. In this work we solve an optimal control problem of a depolluting bioreactor. More particularly, from a simple model of bioprocess, we are interested in maximizing the biogas production over a period T . For particular initial conditions, we show that the solution to the considered problem may be not trivial and depends on constraints on the actuator (the input flow rate). In the case where the actuator is under-dimensioned, we solve the optimization problem.

MOTS-CLS : Contrôle optimal- PMP - HJB - bioréacteur- maximisation-biogaz

KEYWORDS : Optimal control- PMP- HJB- Bioreactor- maximization- biogas

1. Introduction

La digestion anaérobie, ou méthanisation, est un procédé biologique au cours duquel un consortium bactérien dégrade la matière organique pour la transformer en biogaz. Ces procédés représentent une technologie de réacteurs prometteuse, tant par leur capacités de traitement que par la valorisation énergétique qu'ils permettent [1]. Cependant, ils sont relativement peu utilisés car sujets à déstabilisation. C'est la raison pour laquelle de nombreuses lois de commande ont été proposées pour optimiser leur fonctionnement.

Parmi ces lois de commande, celle proposée par Steyer et coll. en 1999 [7] est particulièrement intéressante car elle a été évaluée sur un pilote de digestion anaérobie et a montré des performances importantes. Cette loi se propose de perturber régulièrement le bioprocédé en lui appliquant une impulsion. L'analyse de la réponse du système (en terme de biogaz) permet de décider si oui ou non le système peut supporter une augmentation de la charge polluante à traiter. Si c'est le cas, le débit d'alimentation subit un échelon puis une nouvelle impulsion est appliquée et ainsi de suite. Intuitivement, les experts du procédé ont d'ailleurs suggéré qu'elle pourrait être optimale sans toutefois être en mesure de l'affirmer puisqu'il s'agit d'une loi de commande essentiellement heuristique. Une question que l'on peut se poser est donc de savoir vis-à-vis de quel critère la loi proposée est optimale. Pour cela, nous procédons à une analyse mathématique d'un système biologique modélisé par une seule réaction biologique : une population bactérienne x dégradant un substrat s avec une cinétique de croissance usuelle $\mu(s)$. Le problème de commande auquel on s'intéresse est la maximisation de la quantité de biogaz produit sur un horizon de temps T fixé et par la manipulation du taux de dilution $D(\cdot)$. Pour des conditions initiales particulières, on montre que la solution dépend de contraintes sur le taux de dilution. Plus particulièrement, si celui-ci permet de lessiver le système pour l'équilibre du système qui maximise la production de gaz, alors la solution au problème d'optimisation est triviale [3]. En revanche, si ce dernier a été sous-dimensionné, c'est à dire que sa valeur maximale est inférieure à cette valeur de lessivage, alors le problème est non trivial. Dans ce travail, c'est pour ce dernier cas que nous résolvons le problème d'optimisation. Cet article est organisé comme suit. Dans la section 2, le modèle mathématique est présenté et le problème de contrôle optimal est étudié. Dans la section 3, la stratégie de commande est déduite grâce au Principe du Maximum de Pontriagin (**PMP**) [4, 8]. Dans la section 4, l'optimalité de cette loi de commande est vérifiée à l'aide de la théorie d'Hamilton Jacobi-Bellman (**HJB**) [4, 8]. Des conclusions générales sont résumées dans la dernière section ainsi que des propositions d'extension de ce travail.

2. Description du modèle et formulation du problème

2.1. le Modèle

Nous proposons d'utiliser le modèle mathématique de digestion anaérobie [2] décrivant une seule réaction biologique. Soit $s(t)$, $x(t)$ la solution de condition initiale $s(t_0) = s_0$, $x(t_0) = x_0$ du système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (\mu(s) - D)x \\ \dot{s} &= D(s_{in} - s) - \mu(s)x \end{cases} \quad [1]$$

où

- x est la concentration de la biomasse et s est la concentration du substrat.
- s_{in} est la concentration du substrat d'entrée.
- $D(\cdot)$ est le taux de dilution donné par $D = Q/V$ où Q est le débit d'entrée (varie dans le temps) et V (constant) est le volume du réacteur.

– La fonction de croissance $\mu(s)$ est telle que $\mu(0) = 0$ et $\mu(s) > 0 \forall s > 0$.

En général, le terme de croissance de la deuxième équation du système (1) contient un coefficient de rendement Y , mais il est plus pratique de redimensionner la concentration de la biomasse à x/Y dans le but de réduire le nombre de paramètres du système.

La production totale du biogaz dans un intervalle de temps $[0, T]$ est proportionnelle à la croissance des bactéries [5, 6], elle est donnée par :

$$J(D(t)) = \int_{t_0}^T \mu(s)x.$$

Pour faciliter notre étude, considérons le modèle simplifié suivant :

Considérons une condition initiale telle que $x_0 + s_0 = s_{in}$. Alors on a $x(t) + s(t) = s_{in}$ pour tout t de sorte que le système (1) peut s'écrire en une seule équation différentielle en x seulement :

$$\dot{x} = (\mu(s_{in} - x) - u)x; \quad x(t_0) = x_0. \quad [2]$$

On pose

$$\gamma(x) = \mu(s_{in} - x)x.$$

Dans toute la suite, nous allons considérer le modèle simplifié (2)

2.2. Le Problème

Soit $u = u(\cdot)$ avec $0 \leq u \leq 1$ le contrôle. Soit $x(t)$ solution de l'équation

$$\dot{x} = \gamma(x) - ux, \quad x(t_0) = x_0, \quad 0 < x_0 \leq S_{in}.$$

Soit $T \geq t_0$, on cherche à maximiser

$$J = \max_{0 \leq u \leq 1} \int_{t_0}^T \gamma(x) dt.$$

L'hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}(x, p, u) = p[\gamma(x) - ux] + \gamma(x) = (p + 1)\gamma(x) - pxu.$$

On note que $\max_{0 \leq u \leq 1} \mathcal{H}(x, p, u)$ est atteint pour $u = 1$ si $p < 0$ et pour $u = 0$ si $p > 0$.

D'après le PMP, les conditions nécessaires sont données par [4, 8] :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x, p) = \gamma(x) - ux \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x, p) = -(p + 1)\gamma'(x) - pu \end{cases} \quad [3]$$

avec les conditions aux limites $x(t_0) = x_0$ et $p(T) = 0$.

Hypothèse 2.1 Soit x^* l'unique point tel que $\gamma'(x^*) = 0$. Deux cas se présentent selon que $\mu(s_{in} - x^*) < 1$ (Ce cas est déjà traité (voir [3]) ou bien $\mu(s_{in} - x^*) > 1$. Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse au cas $\mu(s_{in} - x) > 1$ qui correspond à $\gamma(x^*) > x^*$.

Remarque 2.1 Pour des conditions initiales particulières, le contrôle dans le cas non trivial $\mu(s_{in} - x) > 1$ est sous-dimensionné, ce qui signifie que la valeur maximale de ce dernier est inférieure à la valeur d'équilibre du système qui maximise la production de gaz.

3. Stratégie optimale

L'idée consiste à représenter les trajectoires du système hamiltonien dans le plan (x, p) et de lire sur ce portrait de phase quelle est la trajectoire optimale, parmi toutes celles qui vérifient les conditions nécessaires données par le PMP avec la condition de transversalité $p(T) = 0$ [4, 8]. En d'autres termes, il faut chercher les solutions qui vont de la droite verticale $x = x_0$ à la droite horizontale $p = 0$ dans le temps $T - t_0$.

En analysant le système hamiltonien (3) dans les demi-plans $p < 0$ et $p > 0$, les solutions du système hamiltonien sont représentées sur la figure 1. On remarque sur cette figure que dans le cas $\mu(s_{in} - x^*) > 1$, le système admet un point col E_0 où la droite $x = \tilde{x}$ est la séparatrice instable du col et la courbe d'équation $p = \frac{\gamma(\tilde{x}) - \gamma(x)}{\gamma(x) - x}$ est la séparatrice stable. Cette dernière coupe l'axe $p = 0$ au point \bar{x} tel que $\gamma(\bar{x}) = \gamma(\tilde{x})$.

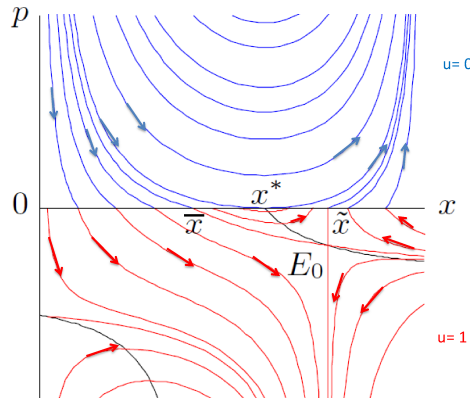


Figure 1. Portrait de phase du système hamiltonien (3) dans le cas $\mu(s_{in} - x^*) > 1$. La courbe noire représente l'isocline $\dot{p} = 0$.

3.1. Solution optimale

Dans cette section on note par $x^{(0)}(t, x_0)$ la solution du problème :

$$\dot{x} = \gamma(x), \quad x(0) = x_0.$$

et $x^{(1)}(t, x_0)$ la solution de

$$\dot{x} = \gamma(x) - x, \quad x(0) = x_0.$$

Soit

$$x_-^0(t_0) = x^0(t_0 - T, x^*) \iff \int_{x^*}^{x_-^0(t_0)} \frac{dx}{\gamma(x)}.$$

et soit les quantités $x_-^1(t_0)$ et $x_+^1(t_0)$ définies par :

$$\gamma(x_-^1(t_0)) = \gamma(x_+^1(t_0)), \quad \int_{x_-^1(t_0)}^{x_+^1(t_0)} \frac{dx}{\gamma(x) - x} = T - t_0.$$

Il est à noter que $x_-^0(t_0) < x_-^1(t_0) < x^* < x_+^1(t_0) < \tilde{x}$ et $x_-^0(T) = x_-^1(T) = x^* = x_+^1(T) < \tilde{x}$.

Théorème 3.1 Soit $x(t)$ la solution optimale de condition initiale $x(t_0) = x_0$. La politique optimale est bang bang et la synthèse est donnée par :

$$u(t, x(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x(t) < x_-^1(t) \\ 1 & \text{si } x_+^1(t) \leq x(t) \end{cases}$$

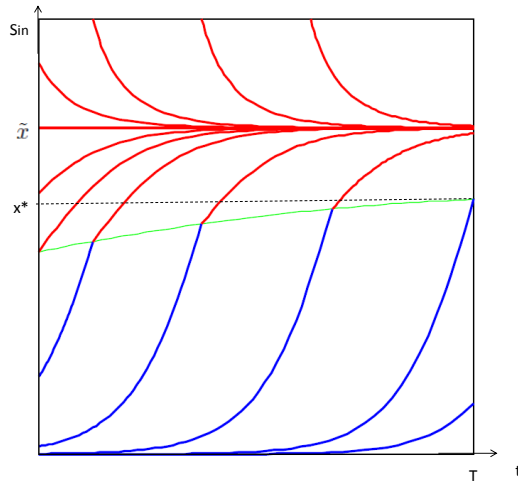


Figure 2. Synthèse dans le cas $\mu(s_{in} - x^*) > 1$. La courbe verte $x = x_-^1(t)$ est la courbe de commutation de $u = 0$ vers $u = 1$.

4. Optimalité de la stratégie de commande avec HJB

Dans la section 3, on a utilisé des conditions nécessaire d'optimalité pour déduire la stratégie de commande optimale. Dans cette section, on utilise HJB pour montrer que les solutions optimales proposées par le PMP vérifient la condition suffisante d'optimalité. A ce propos, il suffit de montrer que la fonction valeur :

$$V(t_0, x_0) = \sup_{0 \leq u \leq 1} \int_{t_0}^T \gamma(x) dt.$$

où $x(t)$ est la solution du système

$$\dot{x} = \gamma(x) - ux, \quad x(t_0) = x_0$$

vérifie l'équation de HJB donnée par :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \gamma(x) + \max_{0 \leq u \leq 1} \left(\frac{\partial V}{\partial x} [\gamma(x) - ux] \right) = 0 \quad [4]$$

Il est à noter que $\max_{0 \leq u \leq 1} \left(\frac{\partial V}{\partial x} [\gamma(x) - ux] \right)$ est atteint pour $u = 0$ si $\frac{\partial V}{\partial x} > 0$ et pour $u = 1$ si $\frac{\partial V}{\partial x} < 0$. Dans le cas $\mu(s_{in} - x^*) > 1$, selon la stratégie indiquée dans le Théorème 3.1, la fonction valeur $V(t_0, x_0)$ où (t_0, x_0) est une condition initiale fixée, est donnée par la proposition suivante :

Proposition 4.1

$$V(t, x) = \begin{cases} x_T - x & \text{si } x \leq x_-^0(t) \\ x_c - x + \int_{x_c}^{x_T} \frac{\gamma(y)}{\gamma(y)-y} dy & \text{si } x_-^0(t) \leq x \leq x_-^1(t) \\ \int_x^{x_T} \frac{\gamma(y)}{\gamma(y)-y} dy & \text{si } x > x_-^1(t), x \neq \tilde{x} \\ \gamma(\tilde{x})(T-t) & \text{si } x = \tilde{x} \end{cases}$$

où x_c et x_T sont définies par :

$$\int_x^{x_T} \frac{dy}{\gamma(y)} = T - t \text{ si } x \leq x_-^0(t).$$

$$\int_x^{x_c} \frac{dy}{\gamma(y)} + \int_{x_c}^{x_T} \frac{dy}{\gamma(y)-y} = T - t \text{ et } \gamma(x_c) = \gamma(x_T) \text{ dans le cas où } x_-^0(t) \leq x \leq x_-^1(t).$$

$$\int_x^{x_T} \frac{dy}{\gamma(y)-y} = T - t \text{ si } x > x_-^1(t), x \neq \tilde{x}.$$

Idee de la démonstration : Si $x_0 > x_-^1(t_0)$. La solution optimale est

$$u(t) = 1, \quad x(t) = x^{(1)}(t - t_0, x_0), \text{ si } t_0 \leq t \leq T.$$

L'optimum correspondant est égal à

$$V(t_0, x_0) = \int_{t_0}^T \gamma(x(t)) dt = \begin{cases} \gamma(\tilde{x})(T - t_0) & \text{si } x_0 = \tilde{x} \\ \int_{x_0}^{x_T} \frac{\gamma(x)}{\gamma(x)-x} & \text{si } x_0 \neq \tilde{x} \end{cases}$$

où x_T est défini par $\int_{x_0}^{x_T} \frac{\gamma(x)}{\gamma(x)-x} = T - t_0$. Supposons que $x_0 < x_-^0(t_0)$, la solution optimale est

$$u(t) = 0, x(t) = x^{(0)}(t - t_0, x_0), \text{ si } t_0 \leq t \leq T.$$

L'optimum est

$$V(t_0, x_0) = \int_{t_0}^T \gamma(x(t)) dt = \int_{x_0}^{x_T} \frac{\gamma(x)}{\gamma(x)}.$$

où x_T est défini par $\int_{x_0}^{x_T} \frac{\gamma(x)}{\gamma(x)} = T - t_0$. Si par contre, $x_-^0(t_0) < x_0 < x_-^1(t_0)$, dans ce cas le contrôle vaut $u(t) = 0$ tant que $x(t) \leq x_c(t_0)$ puis $u(t) = 1$ quand $x(t) > x_c$. La solution optimale est $x(t) = x^{(0)}(t - t_0, x_0)$ pour $t \leq t_c$ avec $x(t_c) = x_c$. A partir de l'instant de commutation t_c , on applique le contrôle $u(t) = 1$ et la solution devient $x(t) = x^{(1)}(t - t_c, x_c)$. L'optimum sera égal à :

$$\begin{aligned} V(t_0, x_0) &= \int_{t_0}^{t_c} \gamma(x^{(0)}(t - t_0, x_0)) dt + \int_{t_c}^T \gamma(x^{(1)}(t - t_c, x_c)) dt \\ &= \int_{x_c}^x \frac{\gamma(x)}{\gamma(x)} dx + \int_{x_c}^{x_T} \frac{\gamma(x)}{\gamma(x) - x} dx. \end{aligned}$$

□

Théorème 4.1 La fonction valeur $V(t, x)$ vérifie l'équation d'Hamilton Jacobi-Bellman (HJB) (4).

Idée de la démonstration : Pour la démonstration, Il suffit de calculer les dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial t}$ et $\frac{\partial V}{\partial x}$ dans chacun des cas mentionnés plus haut et les remplacer dans l'équation du HJB. □

5. Conclusions et perspectives

Dans ce travail, nous avons résolu un problème de commande optimal d'un modèle de digesteur anaérobie impliquant une seule réaction biologique. Pour des conditions initiales particulières et pour une classe de contraintes sur l'actionneur, une stratégie de commande optimale a été proposée pour maximiser la quantité de biogaz produit sur un horizon de temps donné. La représentation des orbites du système hamiltonien dans le plan (x, p) nous a permis de déduire la solution optimale parmi toutes celles qui vérifiaient les conditions nécessaires d'optimalité données par le PMP. Il s'est avéré que ces dernières vérifiaient également la condition suffisante d'optimalité. Il est à noter que cette loi de commande s'applique à toutes les cinétiques de croissance $\mu(s)$ qui font que la fonction $\gamma(x)$ soit non monotone et admet un seul maximum. Il serait judicieux de mesurer l'effet de la suppression de l'hypothèse sur la condition initiale $x_0 + s_0 = s_{in}$ et traiter le problème dans le cas général $x_0 + s_0 \neq s_{in}$, cela nous conduit à résoudre le problème en dimension 2. Sur le plan pratique, il serait intéressant d'appliquer cette loi de commande sur le modèle AM2 [1, 2], un modèle plus réaliste de digestion anaérobie, afin de comparer les performances de cette loi de commande à d'autres stratégies de démarrage [5, 6].

Remerciements : Les auteurs remercient le réseau de recherche euro-méditerranéen TREASURE (INRA Euromed 3+3 project) pour son soutien.

6. Bibliographie

- [1] O. BERNARD., Z. HADJ-SADOK., D. DOCHAIN., A. GENOVESI., J.P. STEYER., Dynamical model development and parameter identification for anaerobic wastewater treatment processl Biotechnology and Bioengineering, 75 (4) (2001).
- [2] D. DOCHAIN., J. HARMAND., Basic concepts of bioprocess control. In bioprocess control D. Dochain (ed.), In CAM control systems, Robotics and Manufacturing Series, ISTE Ltd, John Wiley and Sons, Inc. (2008) 143-171.
- [3] A. GHOUALI., J. HARMAND., A. RAPAPORT., T. SARI., A. MOUSSAOUI., Analyse et contrôle optimal d'un bioréacteur de dépollution des eaux usées (cas trivial $s_0 + x_0 = s_{in}$ et $\mu(s_{in} - x^* < 1)$ mai (2012).
- [4] , J. MACKI., A. STRAUSS. Introduction to optimal control Theory , Springer-Verlag New York. Heidelberg. Berlin, (1982).
- [5] M. SBARCIOG., M. LOCCUFIER., A.V. WOUWER., An optimizing start-up Strategy for a Bio-methanor , Bioprocess and Biosystems Engineering, 35 : 565- 578 (2011).
- [6] K. STAMATELATOU., G. LYBRATOS., C. TSILIGIANNIS., S. PAVLOU, P. PULLAMMANAPPALLIL AND S.A. SVOROS., optimal and suboptimal control on anaerobic digesters , Environmental Modeling and Assessment,2 (1997) 355-363.
- [7] J.P. STEYER, P. BUUFFIÈRE, D. ROLLAND, R. MOLETTA., Advanced control of anaerobic digestion processes throug disturba,ces modeling , Wat. Res. Vol. 33, No. 9, pp. 2059-2068, (1999).
- [8] E. TRÉLAT., Contrôle optimal Théorie et Applications , Deuxième Edition, Mathématiques Concrètes, VUIBERT (2008).