

## Analyse mathématique d'un modèle de digestion anaérobie à trois étapes

Radhouane Fekih Salem <sup>a,b,\*</sup> — Nahla Abdellatif <sup>b,d</sup> — Tewfik Sari <sup>a,c</sup> — Jérôme Harmand <sup>a,e</sup>

<sup>a</sup> EPI Modemic Inra-Inria, UMR Mistea, SupAgro Bât 21,  
2, place Pierre Viala, 34060 Montpellier, France.

<sup>b</sup> Université de Tunis El Manar, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, LAMSIN,  
B.P. 37, 1002 Tunis Le Belvédère, Tunisie. (e-mail: fekih@supagro.inra.fr)

<sup>c</sup> Irstea, UMR Itap,  
361 rue Jean-François Breton, 34196 Montpellier Cedex, France. (e-mail: tewfik.sari@irstea.fr)

<sup>d</sup> Université de Manouba, École Nationale des Sciences de l'Informatique,  
Campus Universitaire de Manouba, 2010 Manouba, Tunisie. (e-mail: nahla.abdellatif@ensi.rnu.tn)

<sup>e</sup> Inra, Laboratoire de Biotechnologie de l'Environnement,  
11100 Narbonne, France. (e-mail: harmand@supagro.inra.fr)

\* Corresponding author.

**RÉSUMÉ.** Dans ce travail, on s'intéresse à l'analyse mathématique d'un modèle du chémostat avec dégradation enzymatique du substrat (matière organique) qui peut être sous forme solide [4]. L'étude du modèle à trois étapes est déduite du sous-modèle puisque certaines variables peuvent être découplées des autres. On étudie l'existence et la stabilité des points d'équilibre du sous-modèle pour des taux de croissance monotones et des taux de dilution distincts. Il est bien connu que le modèle classique du chémostat, avec des taux de croissance monotones, n'admet qu'un seul point d'équilibre globalement attractif. La bistabilité, c'est à dire l'existence de deux équilibres localement stables, ne peut pas se produire [5]. Cette bistabilité peut avoir lieu cependant pour une fonction de croissance non monotone, par exemple du type Haldane. Dans notre nouveau modèle on montre que, même si les taux de croissance sont monotones, alors le système peut présenter deux équilibres localement stables.

**ABSTRACT.** In this work, we focus on the mathematical analysis of the model of chemostat with enzymatic degradation of a substrate (organic matter) that can partly be under a solid form [4]. The study of this 3-step model is derived from a smaller order sub-model since some variables can be decoupled from the others. We study the existence and the stability of equilibrium points of the sub-model considering monotonic growth rates and distinct dilution rates. In the classical chemostat model with monotonic kinetics, it is well known that only one equilibrium point attracts all solutions and that bistability never occurs [5]. In the present study, although (i) only monotonic growth rates are considered and (ii) the concentrations of input substrate concentration is less than the break-even concentration, it is shown that the considered sub-model may exhibit bistability.

**MOTS-CLÉS :** Dégradation enzymatique, chémostat, modèle, taux de croissance, bistabilité.

**KEYWORDS :** Enzymatic degradation, chemostat, models, growth rate, bistability.

## 1. Introduction

La digestion anaérobie est un procédé biologique dans lequel la matière organique est transformée par des micro-organismes en méthane et dioxyde de carbone (biogaz) en l'absence d'oxygène. La recherche de modèles appropriés à être utilisés dans la théorie de contrôle est aujourd'hui une priorité importante pour optimiser les processus de fermentation et résoudre des problèmes importants tels que le développement d'énergie renouvelable à partir des eaux usées. Du point de vue microbiologique, biochimique et technologique, la digestion anaérobie est généralement considérée comme composée de trois étapes : L'hydrolyse et la liquéfaction des molécules organiques de grande taille, insolubles, par des enzymes extracellulaires ; une étape de production d'acides par un consortium microbien acidogène et une étape de production du méthane par un écosystème méthanogène. Plusieurs modèles mathématiques liés à ces phénomènes sont présents dans la littérature mais sont souvent très complexes et non appropriés pour le contrôle [4, 1, 2, 3]. La manière la plus appropriée pour modéliser l'hydrolyse est encore un problème ouvert. De nombreux chimistes prétendent qu'il s'agit d'un phénomène purement enzymatique tandis que les biologistes mettent en avant le rôle majeur des bactéries hydrolytiques. Alors, il existe plusieurs choix :

- On peut considérer que l'activité microbienne enzymatique est constante sans faire intervenir explicitement un compartiment microbien hydrolytique. La vitesse de réaction est  $r_0 = k_{hyd}X_0$  où  $k_{hyd}$  est une constante et  $X_0$  désigne la concentration du substrat lentement biodégradable (généralement la demande chimique en oxygène solide).

- On peut diviser le compartiment du substrat en deux parties : substrat lentement biodégradable  $X_0$  et substrat facilement biodégradable  $S_1$  qui peut être, pour garder le modèle assez simple, dégradé par la même bactérie hydrolytique  $X_1$ , par exemple un unique compartiment regroupant les bactéries "hydrolytique et acidogène". La vitesse de réaction est  $r_0 = \mu_0(X_0)X_1$  où  $\mu_0$  désigne le taux de croissance spécifique de  $X_1$  sur  $X_0$ . Les réactions chimiques de la digestion anaérobie sont résumés dans le tableau suivant :

Étapes	Réactions chimiques
Hydrolyse	$X_0 \xrightarrow{r_0} k_0 S_1$
Acidogénèse	$k_1 S_1 \xrightarrow{r_1} X_1 + k_2 S_2 + CO_2$
Méthanogénèse	$k_3 S_2 \xrightarrow{r_2} X_2 + CO_2 + CH_4$

où  $r_i = \mu_i(S_i)X_i$ ,  $i = 1, 2$ , désignent respectivement les vitesses de réaction et  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2$ , les taux de croissance spécifique de  $X_i$  sur  $S_i$  avec  $S_2$  désigne la concentration de la matière organique effluente (les acides gras volatiles) et  $X_2(t)$  la concentration des bactéries méthanogènes. Finalement,  $k_i$ ,  $i = 0 \dots 3$ , désignent les coefficients pseudo-stœchiométriques associés aux réactions chimiques.

On considère que le chémostat fonctionne en mode continu, c'est-à-dire que le débit d'entrée  $Q_1$  est égal au débit de sortie. Comme le temps de séjour des biomasses est plus grand que celui du substrat pour des faibles concentrations de ce dernier, alors le débit de sortie des biomasses et du substrat lentement dégradé est  $Q_1 - Q_2$ . Soit  $D$  le taux de dilution dans le chémostat et  $\alpha \in [0, 1]$  la fraction de la biomasse qui quitte le réacteur de volume  $V$  avec

$$D = \frac{Q_1}{V} \quad \text{et} \quad \frac{Q_1 - Q_2}{V} = \alpha D.$$

Avec ces notations, le modèle à trois étages s'écrit

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = DX_{0in} - \alpha DX_0 - r_0, \\ \dot{S}_1 = D(S_{1in} - S_1) + k_0 r_0 - k_1 \mu_1(S_1) X_1, \\ \dot{X}_1 = (\mu_1(S_1) - \alpha D) X_1, \\ \dot{S}_2 = D(S_{2in} - S_2) + k_2 \mu_1(S_1) X_1 - k_3 \mu_2(S_2) X_2, \\ \dot{X}_2 = (\mu_2(S_2) - \alpha D) X_2, \end{cases} \quad (1)$$

où  $X_{0in}$  désigne la concentration substrat lentement biodégradable à l'entrée du chémostat et  $S_{jin}, j = 1, 2$ , la concentration du substrat  $j$  à l'entrée du chémostat. D'après le principe de la conservation de la matière pour les schémas réactionnels, on a

$$\int_{t_1}^{t_2} r_0 V d\tau \geq \int_{t_1}^{t_2} k_0 r_0 V d\tau \iff 1 \geq k_0,$$

c'est-à-dire que la quantité de  $X_0$  dégradée est supérieure ou égale à la quantité de  $S_1$  produite. De même, on a  $k_1 \geq 1 + k_2$  et  $k_3 \geq 1$ , c'est-à-dire que la quantité de  $S_1$  dégradée est supérieure ou égale aux quantités de  $X_1$  développée et de  $S_2$  produite. La quantité de  $S_2$  dégradée est supérieure ou égale à la quantité de  $X_2$  développée.

Ce papier est organisé comme suit. Tout d'abord, on étudie le modèle (1) en supposant que le taux de croissance  $\mu_1$  est monotone et  $\mu_2$  est non monotone avec  $r_0 = k_{hyd} X_0$  : ce modèle est dit sans compartiment microbien hydrolytique. Ensuite, on étudie un sous-modèle avec compartiment microbien hydrolytique (3) en supposant que les taux de croissance  $\mu_i, i = 0, 1$  sont monotones avec  $r_0 = \mu_0(X_0) X_1$ . On montre que le sous-modèle peut admettre deux équilibres stables. Finalement, on étudie l'existence des points d'équilibre positifs selon le paramètre  $k_0$ .

## 2. Modèle sans compartiment microbien hydrolytique

On suppose que

**H1 :** La fonction  $\mu_1(\cdot)$  est monotone avec  $\mu_1(0) = 0$ . L'équation  $\mu_1(S_1) = \alpha D$  admet une unique solution  $\lambda_1 = \mu_1^{-1}(\alpha D)$ .

**H2 :** La fonction  $\mu_2(\cdot)$  est non monotone avec  $\mu_2(0) = 0$ . L'équation  $\mu_2(S_2) = \alpha D$  admet deux solutions  $\lambda_2^i, i = 1, 2$ , tel que  $\lambda_2^1 < \lambda_2^2$ .

Si  $r_0 = k_{hyd} X_0$ , alors la première équation du système (1) dépend seulement de la variable  $X_0$ , et  $X_0$  converge globalement vers son équilibre

$$X_0^* = \frac{D}{k_{hyd} + \alpha D} X_{0in}.$$

À l'équilibre de  $X_0$ , les quatre dernières équations du système (1) se réduisent au modèle AM2 suivant

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = D(S_{1in}^* - S_1) - k_1 \mu_1(S_1) X_1, \\ \dot{X}_1 = (\mu_1(S_1) - \alpha D) X_1, \\ \dot{S}_2 = D(S_{2in} - S_2) + k_2 \mu_1(S_1) X_1 - k_3 \mu_2(S_2) X_2, \\ \dot{X}_2 = (\mu_2(S_2) - \alpha D) X_2, \end{cases} \quad (2)$$

où

$$S_{1in}^* = S_{1in} + \frac{k_0 k_{hyd}}{k_{hyd} + \alpha D} X_{0in}.$$

À chaque équilibre  $F = (S_1^*, X_1^*, S_2^*, X_2^*)$  du modèle (2) correspond un équilibre  $E = (X_0^*, S_1^*, X_1^*, S_2^*, X_2^*)$  du modèle (1). De plus, la stabilité locale de ces derniers est déduite de celle des équilibres correspondants  $F$  de (2). L'analyse du système (2) a été faite dans [2, 3]. On obtient le résultat suivant :

**Proposition 2.1** *Les points d'équilibre du système (1) sont données par*

- 1)  $E_0 = (X_0^*, S_{1in}^*, 0, S_{2in}, 0)$  qui existe toujours.
- 2)  $E_1^i = (X_0^*, S_{1in}^*, 0, \lambda_2^i, X_2^i)$  qui existe si et seulement si  $S_{2in} > \lambda_2^i$  avec  $X_2^i = \frac{1}{k_3 \alpha} (S_{2in} - \lambda_2^i)$ .
- 3)  $E_2^0 = (X_0^*, \lambda_1, X_1^*, S_{2in}^*, 0)$  qui existe si et seulement si  $S_{1in}^* > \lambda_1$  avec  $X_1^* = \frac{1}{k_1 \alpha} (S_{1in}^* - \lambda_1)$  et  $S_{2in}^* = S_{2in} + \frac{k_2}{k_1} (S_{1in}^* - \lambda_1)$ .
- 4)  $E_2^i = (X_0^*, \lambda_1, X_1^*, \lambda_2^i, X_2^{*i})$  qui existe si et seulement si  $S_{1in}^* > \lambda_1$  et  $S_{2in}^* > \lambda_2^i$  avec  $X_2^{*i} = \frac{1}{k_3 \alpha} (S_{2in}^* - \lambda_2^i)$ .

On rappelle que la condition de persistance des espèces  $X_1$  dans le modèle AM2 est  $\lambda_1 < S_{1in}$ , [1, 2]. Par l'effet de l'hydrolyse,  $S_{1in}$  a été augmentée à  $S_{1in}^*$ . La condition de persistance de l'espèce  $X_1$  dans le modèle d'hydrolyse devient  $\lambda_1 < S_{1in}^*$ , l'espèce se trouve favorisée par l'ajout du terme d'hydrolyse.

### 3. Modèle avec compartiment microbien hydrolytique

Dans la suite, on s'intéresse à l'étude du sous-modèle donné par les trois premières équations du système (1) avec  $r_0 = \mu_0(X_0)X_1$ , qu'on pourra découpler des deux dernières équations, puisque les trois premières équations ne dépendent pas des variables  $X_2$  et  $S_2$ . Ainsi, on se propose d'étudier l'existence et la stabilité des points d'équilibre du sous-modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = D(X_{0in} - \alpha X_0) - \mu_0(X_0)X_1, \\ \dot{S}_1 = D(S_{1in} - S_1) + k_0 \mu_0(X_0)X_1 - k_1 \mu_1(S_1)X_1, \\ \dot{X}_1 = (\mu_1(S_1) - \alpha D)X_1. \end{cases} \quad (3)$$

Le point d'équilibre de lessivage  $E_0 = (\frac{X_{0in}}{\alpha}, S_{1in}, 0)$  existe toujours. Pour montrer l'existence des points d'équilibre positifs, on considère la fonction  $\xi(X_0) = \frac{D(X_{0in} - \alpha X_0)}{\mu_0(X_0)}$ . On fait l'hypothèse suivante :

**H3** : La fonction  $\mu_0(\cdot)$  est strictement croissante,  $\mu_0(0) = 0$  et  $\mu_0''(X_0) \leq 0$  pour tout  $X_0 \in ]0, \frac{X_{0in}}{\alpha}[$ .

**Lemme 3.1** *Sous l'hypothèse H3, la fonction  $\xi(\cdot)$  s'annule en  $\frac{X_{0in}}{\alpha}$ , elle est décroissante et convexe.*

Dans le cas où la fonction  $\mu_0(\cdot)$  est linéaire ou de type Monod, l'hypothèse H3 est vérifiée. Dans cette section, on se propose d'étudier l'existence des points d'équilibre du système (3) sous les hypothèses H1 et H3. Soit  $\Delta$  la droite d'équation

$$X_1 = \delta(X_0) = \frac{1}{k_1 \alpha} [(S_{1in} - \lambda_1) + k_0 (X_{0in} - \alpha X_0)].$$

**Lemme 3.2** L'équation  $\xi'(X_0) = -\frac{k_0}{k_1}$  admet une unique solution  $\bar{X}_0 \in ]0, \frac{X_{0in}}{\alpha}[$  si et seulement si

$$\xi' \left( \frac{X_{0in}}{\alpha} \right) > -\frac{k_0}{k_1}.$$

De plus,

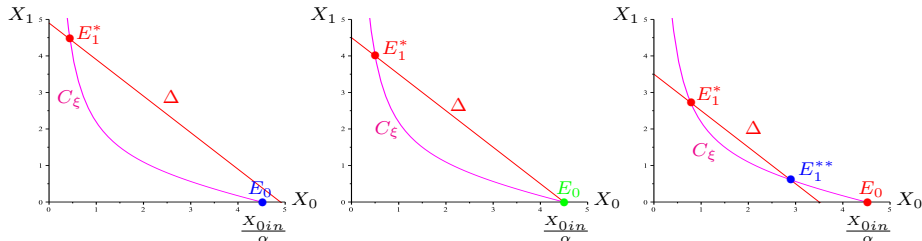
$$\xi' \left( \frac{X_{0in}}{\alpha} \right) > -\frac{k_0}{k_1} \iff k_0\mu_0 \left( \frac{X_{0in}}{\alpha} \right) > k_1\alpha D.$$

Si  $\xi' \left( \frac{X_{0in}}{\alpha} \right) > -\frac{k_0}{k_1}$ , l'intersection de la droite  $\Delta$  avec la courbe de la fonction  $\xi$ , si elle n'est pas vide, comporte un ou deux points qu'on notera  $E_1^* = (X_0^*, \lambda_1, X_1^*)$  et  $E_1^{**} = (X_0^{**}, \lambda_1, X_1^{**})$  (voir Fig. 1). D'après le Lemme 2.2, il existe une unique solution  $\bar{X}_0 \in ]0, \frac{X_{0in}}{\alpha}[$  de l'équation  $\xi'(X_0) = -\frac{k_0}{k_1}$ . Par suite, il existe une valeur limite  $X_1^{Min}$  pour laquelle la courbe de  $\xi$  est tangente à la droite  $\Delta$  et qui vérifie

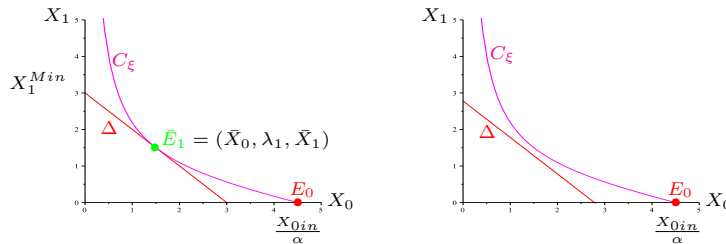
$$X_1^{Min} = \bar{X}_1 + \frac{k_0}{k_1} \bar{X}_0$$

avec  $\bar{E} = (\bar{X}_0, \lambda_1, \bar{X}_1)$  un point d'équilibre du système (3) (voir cas 4 de la Fig. 1). À cette valeur limite  $X_1^{Min}$ , on associe une valeur limite  $S_{1in}^{Min}$  qui vérifie

$$X_1^{Min} = \delta(0) = \frac{1}{k_1\alpha} [(S_{1in}^{Min} - \lambda_1) + k_0 X_{0in}].$$



**Figure 1.** Cas 1 :  $\lambda_1 < S_{1in} = 5.5$ , cas 2 :  $S_{1in} = 4.5 = \lambda_1$ , cas 3 :  $S_{1in}^{Min} < S_{1in} = 2 < \lambda_1$ .



**Figure 2.** Cas 4 :  $S_{1in} = 0.75 = S_{1in}^{Min}$ , cas 5 :  $S_{1in} = 0.2 < S_{1in}^{Min}$ .

Dans le cas général où  $S_{1in}^{Min} > 0$ , on montre le résultat suivant :

**Proposition 3.1**

- 1) Si  $\lambda_1 \leq S_{1in}$ , alors il existe un unique point d'équilibre positif  $E_1^*$ .
- 2) Si  $S_{1in}^{Min} < S_{1in} < \lambda_1$ , alors il existe deux points d'équilibre positifs  $E_1^*$  et  $E_1^{**}$ .
- 3) Si  $S_{1in} = S_{1in}^{Min}$ , alors il existe un unique point d'équilibre positif  $\bar{E}_1$ .
- 4) Si  $S_{1in} < S_{1in}^{Min}$ , alors il n'existe aucun point d'équilibre positif.

Dans la suite, on se propose d'étudier le comportement asymptotique des points d'équilibre du système (3). On choisit la couleur rouge pour le point d'équilibre Localement Asymptotiquement Stable (LAS), la couleur bleue pour le point d'équilibre instable et la couleur verte pour le point d'équilibre nœud col (voir Fig. 1 et Fig. 2).

**Proposition 3.2**

- 1)  $E_0$  est LAS si et seulement si  $\mu_1(S_{1in}) < \alpha D$ .
- 2) Si  $E_1^*$  existe, alors il est LAS.
- 3) Si  $E_1^{**}$  existe, alors il est instable.

**Preuve.** La matrice jacobienne en  $E_1^* = (X_0^*, \lambda_1, X_1^*)$  est égale à

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} -m_{11} & 0 & -m_{13} \\ m_{21} & -m_{22} & \theta \\ 0 & m_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$m_{11} = \alpha D + \mu'_0(X_0^*)X_1^*, \quad m_{13} = \mu_0(X_0^*), \quad m_{21} = k_0\mu'_0(X_0^*)X_1^*, \\ m_{22} = D + k_1\mu'_1(\lambda_1)X_1^*, \quad \theta = k_0\mu_0(X_0^*) - k_1\alpha D, \quad m_{32} = \mu'_1(\lambda_1)X_1^*$$

avec  $m_{11}, m_{13}, m_{21}, m_{22}$  et  $m_{32}$  sont strictement positifs. Le polynôme caractéristique de  $J_1$  est donné par

$$P_{J_1}(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

avec

$$a_0 = -1, a_1 = -(m_{11} + m_{22}), a_2 = -m_{11}m_{22} + \theta m_{32}, a_3 = -m_{32}(m_{21}m_{13} - \theta m_{11}).$$

D'après le critère de Routh-Hurwitz,  $E_1^*$  est LAS si et seulement si

$$\begin{cases} a_i < 0, & i = 0 \dots 3 \\ a_1a_2 - a_0a_3 > 0. \end{cases}$$

On peut facilement vérifier que

$$a_2 = [k_0\mu_0(X_0^*) - k_1m_{11}]\mu'_1(\lambda_1)X_1^* - [D\mu'_0(X_0^*)X_1^* + \alpha D(D + k_1\mu'_1(\lambda_1)X_1^*)]$$

et comme

$$\xi'(X_0^*) + \frac{k_0}{k_1} = \frac{k_0\mu_0(X_0^*) - k_1m_{11}}{k_1\mu_0(X_0^*)}$$

par suite, si  $\xi'(X_0^*) < -\frac{k_0}{k_1}$ , alors  $a_2 < 0$ . De plus,

$$a_3 = m_{32}\alpha D[k_0\mu_0(X_0^*) - k_1m_{11}] = m_{32}\alpha D\left[\xi'(X_0^*) + \frac{k_0}{k_1}\right]k_1\mu_0(X_0^*)$$

qui est strictement négative si et seulement si  $\xi'(X_0^*) < -\frac{k_0}{k_1}$ . Finalement,

$$a_1a_2 - a_0a_3 = -\left[\xi'(X_0^*) + \frac{k_0}{k_1}\right]k_1\mu_0(X_0^*)\mu'_0(X_0^*)\mu'_1(\lambda_1)X_1^{*2} + P$$

où  $P = Dm_{11}^2 + ((\alpha D)^2 + \alpha D\mu'_0(X_0^*)X_1^*)k_1\mu'_1(\lambda_1)X_1^* - m_{22}a_2$ , qui est strictement positive si  $\xi'(X_0^*) < -\frac{k_0}{k_1}$ . Comme  $E_1^*$  vérifie  $\xi'(X_0^*) < -\frac{k_0}{k_1}$ , alors il est LAS et  $E_1^{**}$  vérifie  $\xi'(X_0^{**}) > -\frac{k_0}{k_1}$ , alors il est instable, ce qui achève la preuve de la proposition. ■

Les simulations numériques illustrées dans la Fig. 3 sont obtenues pour les fonctions de Monod suivantes

$$\mu_0(X_0) = \frac{2.5X_0}{1.5 + X_0} \quad \text{et} \quad \mu_1(S) = \frac{2S}{1.5 + S}.$$

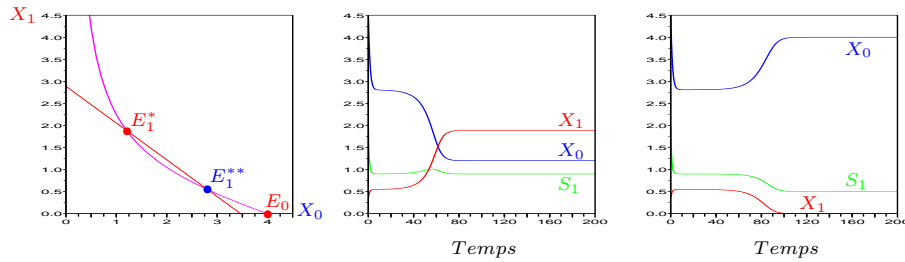
On choisit les valeurs suivantes des paramètres  $X_{0in} = 3$ ,  $D = 1$ ,  $\alpha = 0.75$ ,  $k_0 = 1$  et  $k_1 = 1.2$ . On illustre le cas de bistabilité pour  $S_{1in} = 0.7 < \lambda_1 = 0.9$  et tel que

$$\xi'\left(\frac{X_{0in}}{\alpha}\right) = -0.412 > -0.833 = -\frac{k_0}{k_1}.$$

Dans ce cas, l'équation  $\xi(X_0) = \delta(X_0)$  admet deux solutions (voir Fig. 3 à gauche) et les points d'équilibre sont donnés par

$$E_0 = (4, 0.5, 0), \quad E_1^* = (1.201, 0.9, 1.887) \quad \text{et} \quad E_1^{**} = (2.808, 0.9, 0.548).$$

La Fig. 3 au milieu montre la convergence vers le point d'équilibre positif  $E_1^*$  pour la condition initiale  $X_0(0) = 4.5$ ,  $S_1(0) = 2$  et  $X_1(0) = 0.368$ . La Fig. 3 à droite montre le lessivage pour la condition initiale  $X_0(0) = 4.5$ ,  $S_1(0) = 2$  et  $X_1(0) = 0.367$ .



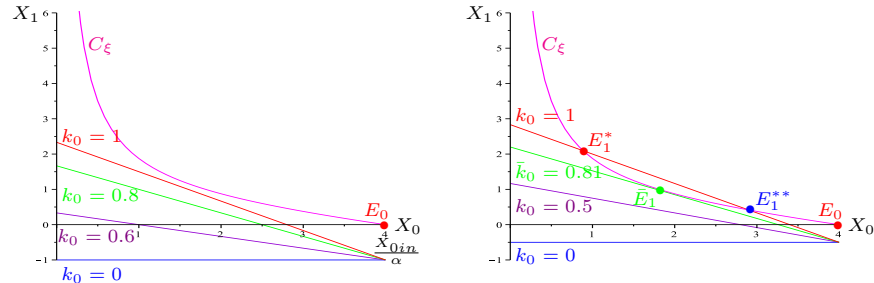
**Figure 3.** Existence de deux points d'équilibre positifs et bistabilité pour  $S_{1in} < \lambda_1$ .

Les simulations numériques montrent que selon la condition initiale, la solution converge soit vers le point d'équilibre positif  $E_1^*$  soit vers le lessivage  $E_0$ , c'est-à-dire que le système présente un comportement de bistabilité. De plus,  $E_1^{**}$  est un point selle dont les séparatrices stables séparent le quadrant positif en deux régions qui sont les bassins d'attraction de chacun des équilibres  $E_0$  et  $E_1^*$ .

Dans la suite, on se propose d'étudier l'existence des points d'équilibre positifs selon la valeur de  $k_0$  (voir Fig. 4). Dans le cas où  $S_{1in} < \lambda_1$ , il existe une valeur critique  $\bar{k}_0 > 0$  tel que  $\xi'(\bar{X}_0) = -\frac{\bar{k}_0}{k_1}$  où  $\bar{E}_1 = (\bar{X}_0, \lambda_1, \bar{X}_1)$  un point d'équilibre positif du système (3). On démontre le résultat suivant :

### Proposition 3.3

- 1) Si  $\bar{k}_0 > 1$ , alors il n'existe aucun point d'équilibre positif.
- 2) Si  $\bar{k}_0 = 1$ , alors il existe un unique point d'équilibre positif  $\bar{E}_1$ .
- 3) Si  $\bar{k}_0 < 1$ 
  - a) Si  $k_0 \in [0, \bar{k}_0[$ , alors il existe aucun point d'équilibre positif.
  - b) Si  $k_0 = \bar{k}_0$ , alors il existe un unique point d'équilibre positif  $\bar{E}_1$ .
  - c) Si  $k_0 \in ]\bar{k}_0, 1]$ , alors il existe deux points d'équilibre positifs  $E_1^*$  et  $E_1^{**}$ .



**Figure 4.** *Lessivage* :  $S_{1in} = 3.9 < \lambda_1$  et  $0 \leq k_0 \leq 1$ . *Bistabilité* :  $S_{1in} = 4.2 < \lambda_1$  et  $\bar{k}_0 = 0.81 < k_0 \leq 1$ .

On conclut que, pour  $S_{1in} < \lambda_1$ , le système (3) peut présenter de la bistabilité, tandis que dans le modèle classique du chémostat (sans hydrolyse) le point d'équilibre de lessivage attire toutes les solutions. La modélisation de l'hydrolyse fait apparaître deux points d'équilibre positifs. L'équilibre positif  $E_1^*$  et le lessivage  $E_0$  sont stables et le second équilibre positif  $E_1^{**}$  est un col qui sépare deux bassins d'attraction.

## 4. Conclusion

Dans ce travail, on a étudié un modèle du chémostat avec dégradation enzymatique du substrat dont une partie peut être sous forme particulière. On a démontré que le sous-modèle, avec une modélisation particulière de l'hydrolyse qui fait intervenir un taux de croissance monotone et des concentrations du substrat à l'entrée du chémostat inférieures au seuil de rentabilité, peut présenter une bistabilité, tandis qu'il ne peut pas se produire dans le modèle classique du chémostat où le lessivage est l'unique point d'équilibre qui attire toutes les solutions [5]. On démontre ainsi, pour la modélisation de l'hydrolyse proposée, l'importance de considérer cette étape dans l'apparition des points d'équilibre positifs et la bistabilité. Les simulations numériques illustrent les résultats mathématiques démontrés.

**Remerciements :** Ce travail a été réalisé dans le cadre du 3+3 projet Euromed 3+3 TREASURE (cf. <http://blog.inria.fr/treasure/> pour toute information complémentaire).

## 5. Bibliographie

- [1] G. BASTIN, D. DOCHAIN, « On-line estimation and adaptive control of bioreactors, Dynamics of Microbial Competition », *Elsevier Science Publishers* (1991).
- [2] B. BENYAHIA, T.SARI, B.CHERKI, J. HARMAND, « Bifurcation and stability analysis of a two step model for monitoring anaerobic digestion processes », *Journal of Process Control*, n° 22 (2012), 1008–1019.
- [3] B. BENYAHIA, T.SARI, B.CHERKI, J. HARMAND, « Sur le modèle AM2 de digestion anaérobie », *CARI'10, Proceedings of the 10th African Conference on Research in Computer Science and Applied Mathematics*, INRIA, E. Badouel, A. Sbihi and I. Lokpo (Eds.), (2010), 453–460.
- [4] I. SIMEONOV, S. STOYANOV, « Modelling and dynamic compensator control of the anaerobic digestion of organic wastes », *Chem. Biochem. Eng. Q.*, n° 17 (4) (2003), 285–292.
- [5] H.L. SMITH, P. WALTMAN, « The Theory of the Chemostat, Dynamics of Microbial Competition », *Cambridge University Press* (1995).